УДК 517.968.21

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

З.А. Каденова, Ж.Ш. Орозмаматова

Рассмотрена регуляризация и получены оценки устойчивости решений систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях.

Ключевые слова: линейные интегральные уравнения первого рода; регуляризация.

REGULARIZATION AND STABILITY OF SOLUTIONS SYSTEMS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF FREDHOLM OF THE FIRST KIND IN UNLIMITED AREAS

Z.A. Kadenova, J.Sh. Orozmamatova

It is considered the regularization and it is received the stability of solutions systems of the linear integral equations of Fredholm of the first kind in unlimited areas.

Keywords: linear integral equations of the first kind; regularization.

Постановка задачи. В настоящей статье на основе метода неотрицательных квадратичных форм для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода в неограниченных областях построена регуляризация и получены оценки устойчивости. Рассмотрим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty), \tag{1}$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

$$K(t,s) = (K_{ij}(t,s)),\ A(t,s) = (A_{ij}(t,s)),\ B(t,s) = (B_{ij}(t,s)),$$
$$K(t,s) \in L_2([a,\infty)\times[a,\infty);\ M),$$
$$u(t) = (u_i(t)),\ f(t) = (f_i(t)) \in L_2([a,\infty);\ E_n).$$

Отметим, что интегральные уравнения первого рода или интегральные уравнения, сводящиеся к ним, были изучены в [1–5], где были получены теоремы единственности, устойчивости и регуляризации.

В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t). \tag{3}$$

Обе части системы (3) скалярно умножим на вектор-функцию *u(t)*. Полученное произведение проинтегрируем по области $a \le t < \infty$, получим:

$$\int_a^\infty \left\langle \int_a^t A(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt + \int_a^\infty \left\langle \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds, u(t) \right\rangle_n dt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt, \tag{4}$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t) \rangle_n dsdt + \int_a^\infty \int_t^c \langle B(t,s)u(s), u(t) \rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt. \tag{5}$$

Применяя формулу Дирихле, из (5) имеем:

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle A(t,s)u(s), u(t) \rangle_n dsdt + \int_a^\infty \int_a^t \langle B^*(s,t)u(s), u(t) \rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt,$$

$$\int_a^\infty \int_a^t \langle (A(t,s) + B^*(s,t))u(s), u(t) \rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt.$$

Обозначим

$$H(t,s) = \frac{1}{2}\left(A(t,s) + B^*(s,t)\right), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) | \, a \le s \le t < \infty\}. \tag{6}$$

Тогда

$$2\int_a^\infty \int_a^t \langle H(t,s)u(s), u(t) \rangle_n dsdt = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_n dt. \tag{7}$$

Введём новую матричную функцию $M(t,s) = (M_{ij}(t,s))$ следующим образом:

$$M(t,s) = \begin{cases} H(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ H(s,t), & a \le t \le s < \infty, \end{cases} \tag{8}$$

где $H(t,s) = (H_{ij}(t,s)), \quad H(s,t) = (H_{ij}(s,t))$.

Ясно, что $M(t,s) = M(s,t)$.

$$M(t,s) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \begin{pmatrix} \phi_1^{(\nu)}(t) \\ . \quad . \quad . \\ \phi_n^{(\nu)}(t) \end{pmatrix} \left(\bar{\phi}_1^{(\nu)}(s) \ldots \bar{\phi}_n^{(\nu)}(s)\right), \quad m \le \infty. \tag{9}$$

В дальнейшем будем считать, что все собственные значения λ_ν матричного ядра *M(t,s)* положительны. В силу полной непрерывности и самосопряженности оператора *M*, порожденного матричным ядром *M(t,s)*, ортонормированная последовательность собственных вектор-функций $\{\phi^{(\nu)}(t)\}$ полна в $L_2([a,\infty); E_n)$. Очевидно, что если $u(t) \in L_2([a,\infty), E_n)$, то $\|u(t)\| = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |u^{(\nu)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, где $u^{(\nu)} = \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$.

Пусть последовательность соответствующих собственных значений $\{\lambda_\nu\}$ расположена в порядке убывания их модулей.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра *α*, выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t) \in L_2([a,\infty); E_n) \quad : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} |u^{(\nu)}|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad u^{(\nu)} = \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle, (\nu = 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$u^{(\nu)} = \int_a^\infty \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle_n dt. \tag{10}$$

Ясно, что если $u(t) \in M_\alpha$, то $\|u(t)\| \le c\lambda_1^\alpha$.

Будем предполагать, что $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда система (1) имеет решение $u(t) \in M_\alpha$, и справедливо

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left| \int_a^\infty \langle u(t), \phi^{(\nu)}(t) \rangle_{E_n} dt \right|^2 = \int_a^\infty \langle f(t), u(t) \rangle_{E_n} dt.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|u^{(\nu)}\right|^{2}\leq\left\|f(t)\right\|\cdot\left\|u(t)\right\|. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$\left\|u(t)\right\|^{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}}}{\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}\leq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{2}}{\lambda_{\nu}^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|u^{(\nu)}\right|^{2}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=1+\alpha,\ q=(1+\alpha)/\alpha$. Учитывая $u(t)\in M_{\alpha}$ и (11), из последнего неравенства имеем:

$$\left\|u(t)\right\|^{2}\leq c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left\langle\left\|f(t)\right\|,\left\|u(t)\right\|\right\rangle^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\left\|u(t)\right\|\leq c^{\frac{1}{2+\alpha}}\cdot\left\|f(t)\right\|^{\frac{\alpha}{2+\alpha}},\ 0<\alpha<\infty. \quad (12)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть оператор *M* порожденный матричным ядром *M(t,s)* положительный, где *M(t,s)* определен по формуле (8) и (9). Тогда решение системы (1) в $L_2([a,b];E_n)$ единственно. Кроме того, на множестве $K(M_\alpha)$ $(K(M_\alpha)$ образ M_α при отображении оператором *K* оператор K^{-1}, обратный к *K*, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\dfrac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (12).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon u(t,\varepsilon)+\int_{a}^{\infty}K(t,s)u(s,\varepsilon)ds=f(t),\quad t\in[a,\infty),\ \varepsilon>0 \quad (13)$$

будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α.

На самом деле, сделаем следующую подстановку в системе (1)

$$u(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon),$$

где $u(t)\in M_{\alpha}$ – решение системы (1), получим:

$$\varepsilon\,\xi(t,\varepsilon)+\int_{a}^{\infty}K(t,s)\,\xi(s,\varepsilon)ds=-\varepsilon\,u(t).$$

Отсюда, учитывая (1), имеем:

$$\varepsilon\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|^{2}\leq\varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|, \quad (14)$$

где $\xi_\nu(\varepsilon)$ – коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\phi^{(\nu)}(t)=\left\{\phi_i^{(\nu)}(t)\right\}$ т. е. $\xi_{\nu}(\varepsilon)=\left\langle\xi(t,\varepsilon),\phi^{(\nu)}(t)\right\rangle$. Применяя неравенство Гёльдера при $p=q=\dfrac{1}{2}$, из (14) получим:

$$\left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|\leq\left\|u(t)\right\|, \quad (15)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_{\nu}\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|^{2}\leq\varepsilon\left\|u(t)\right\|^{2}\leq\varepsilon c\lambda_{1}^{\alpha},\varepsilon>0. \quad (16)$$

С другой стороны,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_{\nu}(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_{\nu}^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_{\nu}(t,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гёльдера при $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, $m = 2(1+\alpha)$, $n = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2 \lambda_\nu\right)^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^\alpha}\right)^{\frac{1}{(1+\alpha)2}} \left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{1}{(1+\alpha)}} \left\|u(t)\right\|^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^\alpha}\right)^{\frac{1}{q}} \left\|\xi(t,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}} \left\|u(t)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее, в силу $u(t) \in M_\alpha$, (15) и (16) из последнего неравенства имеем:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le \left(\varepsilon c \lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{q}} \left(c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{p+q}{pq}}.$$

Отсюда, подставляя $p = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q = 2(1+\alpha)$, получим:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot \left(c\lambda_1^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\varepsilon c \lambda_1^\alpha\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}, \tag{17}$$

т. е. $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c^{\frac{1}{2(1+\alpha)}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha}{2}} \lambda_1^{\frac{\alpha^2}{2(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right| \left|\xi_\nu(\varepsilon)\right| \le c \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{18}$$

Учитывая (18), из (14) имеем:

$$\left\|u(t,\varepsilon) - u(t)\right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}} \cdot \varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{19}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть оператор *M,* порожденный матричным ядром *M(t,s)* положительный и $f(t) \in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (19), где $u(t,\varepsilon)$ – решение системы (13), *u(t)* – решение системы (12); *M(t,s)* определен по формуле (8).

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 31–33.
2. *Лаврентьев М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
3. *Иманалиев М.И.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // ДАН СССР. 1989. Т. 309. № 5. С. 1052–1055.
4. *Asanov A.* Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables / A. Asanov, M. Haluk Chelik, Z.A. Kadenova // International Journal of contemporary mathematical sciences. 2013. Vol. 7. № 19. P. 907–914. HIKARI Ltd.
5. *Asanov A.* Uniqueness and Stability of Solutions for Certain Linear Equations of the First Kind with Two Variables / A. Asanov, Z.A. Kadenova // Bulletin of Peoples Friendship of Russia. Moscow, 2013. № 3. P. 30–36.