УДК 517.968.22

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Т.Т. Каракеев, Н.Т. Мустафаева

Рассмотрены вопросы метода построения и обоснования регуляризации линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

Ключевые слова: регуляризация; уравнение Вольтерра; равномерная сходимость.

REGULARIZATION OF LINEAR TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL VOLTERRA EQUATIONS OF FIRST KIND

T.T. Karakeev, N.T. Mustafaeva

It is considered the issues about the method of the construction and justification of the regularization of linear two-dimensional integral Volterra equations of the first kind.

Keywords: regularization; Volterra equation; uniform convergence.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода возникают при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в частности при решении обратной задачи для уравнения теплопроводности [1, с. 28], задачи Бицадзе – Самарского для уравнения Буссинеска – Лява [2] и др.

Методы регуляризации лаврентьевского типа для интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве непрерывных и суммируемых функций предложены в [3]. Случай с двумя независимыми переменными уравнения исследован в [4], в работе [5] построено регуляризирующее решение для некорректного случая уравнения, когда нарушается необходимое условие существования непрерывного решения. В данной работе в пространстве непрерывных функций исследуются вопросы регуляризации уравнения с непрерывным ядром и правой частью.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$\int_0^x K(x,t,\tau)u(t,\tau)dt = g(x,\tau), \tag{1}$$

где заданные функции $K(x, t, \tau)$, $g(x, \tau)$ подчиняются условиям:

а) $K(x,t,\tau)\in C(D),\ K(x,x,\tau)\ge 0,\ \ g(x,\tau)\in C(D_0),\ g(0,\tau)=0,$

$D = D_1\times[0,T],\ D_1=\{(x,t)/0\le t\le x\le b\},\ D_0=[0,b]\times[0,T];$

б) $G(x,\tau)\ge d_1,\ G(x,\tau)=K(x,x,\tau)+C_1 g(x,\tau),\ 0<C_0\ ,C_1,d_1=const.$

Пусть T – оператор Вольтерра вида $(Tv)(x,\tau)=\int_0^x u(t,\tau)v(t,\tau)dt$. Действуем оператором $I+C_1T$, где I – тождественный оператор, на уравнение (1). Тогда получим уравнение, которое после эквивалентного преобразования примет следующий вид:

$$\int_0^x G(t,\tau)u(t,\tau)dt = \int_0^x L(x,t,\tau)u(t,\tau)dt + C_1\int_0^x u(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)u(s,\tau)ds + g(x,\tau), \tag{2}$$

где $L(x,t,\tau)=K(t,t,\tau)-K(x,t,\tau)$.

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1):

$$\varepsilon u_\varepsilon(x,\tau)+\int_0^x G(t,\tau)u_\varepsilon(t,\tau)dt=\int_0^x L(x,t,\tau)u_\varepsilon(t,\tau)dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\times \times u_\varepsilon(s,\tau)ds+g(x,\tau). \tag{3}$$

С помощью резольвенты ядра *(– G (t, τ) / ε)*, уравнение (3) приведем к следующему виду:

$$u_\varepsilon(x,\tau)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\left\{\int_0^t L(t,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)ds-\int_0^x L(x,s,\tau)\times\right.$$
$$\times u_\varepsilon(s,\tau)ds+C_1\int_0^t u_\varepsilon(s,\tau)ds\int_s^t K(\nu,s,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu-\int_0^x u_\varepsilon(s,\tau)ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\times$$
$$\left.\times u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu++g(t,\tau)-g(x,\tau)\right\}+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t,\tau)\times\right. \tag{4}$$
$$\left.\times u_\varepsilon(t,\tau)dt+C_1\int_0^x u_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)ds+g(x,\tau)\right\}\equiv(Au_\varepsilon)(x,\tau).$$

Пусть $\bar{u}_\varepsilon(x,\tau),\ \tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\in\Omega(D_0)$, где

$$\Omega(D_0)=\left\{u(x,\tau)\in C(D_0):\left|u(x,\tau)-u_0\right|\le r_0,\ 0<u_0,r_0=const\right\}.$$

Оценим разность операторов $(A\bar{u}_\varepsilon)(x,\tau)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x,\tau)$. Оценивая выражения из этой разности, получим неравенства:

$$1)\left|\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\left\{\int_0^t\left[L(x,s,\tau)-L(t,s,\tau)\right]\left[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right]ds+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^x L(x,s,\tau)\left[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right]ds\right\}dt\right|\le\frac{L_K}{\varepsilon^2}\int_0^x G(t,\tau)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)(x-t)\times$$
$$\times\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right|ds\,dt\le\frac{L_k}{\varepsilon^2}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\times$$
$$\times\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{d_1}ds\,dt\le\frac{L_k}{d_1}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\int_0^x\exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\right)\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\times$$
$$\times d_t\left(\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\right)\le L_k d_1^{-1}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt,$$

где $0<L_K$ – коэффициент Липшица ядра *K (x, t, τ)* по первому аргументу;

$$2)\ \left|\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\int_0^x L(x,t,\tau)\left[\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right]dt\right|\le\frac{L_k}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\times$$
$$\times\int_0^x(x-t)\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\le\frac{L_k}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)x\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\le$$
$$\le\frac{L_k}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\int_0^x\frac{G(s,\tau)}{d_1}ds\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\le\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\times$$
$$\times\frac{L_k}{d_1}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\int_0^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\le L_k d_1^{-1}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt;$$

$$3)\left|\frac{C_1}{\varepsilon}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\left\{\int_0^x\left[\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right]dt\int_t^x K(s,t,\tau)\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)ds+\int_0^x\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)dt\times\right.\right.$$

$$\times\int_t^x K(s,t,\tau)\left[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right]ds\Bigg\}\Bigg| \le \frac{2C_1Mr}{\varepsilon}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\times$$

$$\times\int_0^x\frac{G(s,\tau)}{d_1}ds \le 2C_1Mr\,d_1^{-1}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt,\ где\ \ M=\max_D\left|K(x,t,\tau)\right|, r=r_0+u_0;$$

$$4)\ \Bigg|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\Bigg\{\int_0^t\left[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right]ds\int_t^x K(\nu,s,\tau)\bar{u}_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+$$

$$+\int_t^x\left[\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right]ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\bar{u}_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu\Bigg\}dt\Bigg| \le \frac{C_1Mr}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)\times$$

$$\times G(t,\tau)(x-t)\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(s,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)\right|ds\,dt \le \int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)\times$$

$$\times\frac{C_1Mr}{d_1}\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\ d_t\left(\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\right) \le C_1Mrd_1^{-1}\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt;$$

$$5)\ \Bigg|\frac{C_1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\Bigg\{\int_0^t\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)ds\int_t^x K(\nu,s,\tau)\left[\bar{u}_\varepsilon(\nu,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu,\tau)\right]d\nu+$$

$$+\int_t^x\tilde{u}_\varepsilon(s,\tau)ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\left[\bar{u}_\varepsilon(\nu,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(\nu,\tau)\right]d\nu\Bigg\}dt\Bigg| \le \frac{C_1Mbr}{\varepsilon^2}\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}\times$$

$$\times\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)(x-t)dt \le\le \frac{C_1Mbr}{d_1}\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}\times$$

$$\times\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\,d_t\left(\int_t^x\frac{G(s,\tau)}{\varepsilon}ds\right) \le \frac{C_1Mbr}{d_1}\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)},$$

где

$$\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}=\max_{D_0}\left|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right|.$$

На основе оценок 1) – 5) приходим к следующему неравенству:

$$\left|(A\bar{u}_\varepsilon)(x,\tau)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x,\tau)\right| \le q_0b\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}+q_1\int_0^x\left|\bar{u}_\varepsilon(t,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(t,\tau)\right|dt,$$

где $q_0=C_1Mr\,d_1^{-1}$ $q_1=(2L_k+3C_1Mr)d_1^{-1}$.

В итоге по норме получим оценку:

$$\left\|(A\bar{u}_\varepsilon)(x,\tau)-(A\tilde{u}_\varepsilon)(x,\tau)\right\|_{C(D_0)} \le q\left\|\bar{u}_\varepsilon(x,\tau)-\tilde{u}_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)},\ q=(q_0+q_1)b. \tag{5}$$

Пусть оператор $(H_\varepsilon u)(x,\tau)$ задается в виде

$$(H_\varepsilon u)(x,\tau)\equiv\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)u(x,\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)\times$$

$$\times G(t,\tau)\left[u(x,\tau)-u(t,\tau)\right]dt,$$

Аналогично, как в [1, с. 5], можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. При выполнении условий (а)–*(б)* и $u(x,\tau)\in C[0,b]$ имеет место оценка

$$\left\|(H_\varepsilon u)(x,\tau)\right\|_{C(D_0)} \le 3\left\|u(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right),$$

где $\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right)=\sup\limits_{|x-y|\le\delta}\left|u(x,\tau)-u(y,\tau)\right|,\ \tau\in[0,T], 0<\beta<1.$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (а) – (б), $q<1$ и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau)\in\Omega(D_0)$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1). При этом справедлива оценка

$$\left\|u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}\le(1-q)^{-1}\times\left(3u\left\|(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}\right)+\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right).$$

Доказательство. С помощью подстановки

$$\eta_\varepsilon(x,\tau)=u_\varepsilon(x,\tau)-u(x,\tau) \tag{6}$$

из (4) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon(x,\tau)=&-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x G(s,\tau)ds\right)G(t,\tau)\left\{\int_0^t L(t,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)ds-\int_0^x L(x,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)ds+\right.\\&+C_1\left[\int_0^t\eta_\varepsilon(s,\tau)ds\int_s^t K(\nu,s,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu-\int_0^x\eta_\varepsilon(s,\tau)ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu+\right.\\&\left.+\int_0^t u(s,\tau)ds\int_s^t K(\nu,s,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu-\int_0^x u(s,\tau)ds\int_s^x K(\nu,s,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\nu\right]+\\&\left.+\varepsilon\left[u(t,\tau)-u(x,\tau)\right]\right\}dt+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x G(s,\tau)ds\right)\left\{\int_0^x L(x,t,\tau)\eta_\varepsilon(t,\tau)dt+\right.\\&\left.+C_1\int_0^x\eta_\varepsilon(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)ds+C_1\int_0^x u(t,\tau)dt\int_t^x K(s,t,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)ds+\varepsilon u(x,\tau)\right\}.\end{aligned}$$

Используя оценку (5), получим:

$$\left|\eta_\varepsilon(x,\tau)\right|\le q_0\left\|\eta_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}+q_1\int_0^x\left|\eta_\varepsilon(t,\tau)\right|dt+\left\|(H_\varepsilon u)(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}.$$

В обеих частях неравенства переходим к норме. Тогда

$$\left\|\eta_\varepsilon(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}\le(1-q)^{-1}\left\|(H_\varepsilon u)(x,\tau)\right\|_{C(D_0)}.$$

Откуда в силу леммы 1 и (6), при $\varepsilon\to 0$ функция $u_\varepsilon(x)\to u(x)$ равномерна. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $\Omega(D_0)$.

Литература

1. *Алифанов О.М.* Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. М.: Наука, 1988. 288 с.
2. *Сопуев А.* Задача Бицадзе – Самарского для уравнения Буссинеска – Лява / А. Сопуев, А.Б. Осмоналиев // Вестник КГНУ: Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике: Тр. межд. научн. конф. Бишкек, 2001. Серия 3. Вып. 6. С. 112–116.
3. *Иманалиев М.И.* Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 21. Фрунзе: Илим, 1988. С. 38.
4. *Асанов А.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 13. Фрунзе: Илим, 1980. С. 207–215.
5. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода / Т.Д. Омуров. Бишкек: Илим, 2003. 162 с.