

УДК 539.30

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ С ТРЕУГОЛЬНОЙ ЭПЮРОЙ

Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев, А.А. Ширяева

Определено и исследовано напряженно-деформированное состояние изотропной и анизотропной полуплоскостей под действием распределенной нагрузки с треугольной эпюрой.

Ключевые слова: упругая полуплоскость; комплексные потенциалы; граничные задачи; напряжения; деформация; нагрузка с треугольной эпюрой.

ISOTROPIC AND ANISOTROPIC STRESS DISTRIBUTION OF HALF-PLANE UNDER ACTION OF LOAD WITH A TRIANGULAR DIAGRAM

B. Zhumabaev, A.A. Amanaliev, A.A. Shiryaeva

It is defined and examined the stress-strain condition of isotropic and anisotropic half-planes under the action of distributed load with triangular diagram.

Keywords: elastic half-plane; complex potentials; boundary tasks; stress; strain; load with triangular diagram.

Массивы горных пород обладают ярко выраженной неоднородностью строения и изменчивостью физико-механических свойств. Постановка и решение граничных задач для нижнего полупространства имеет прямое отношение оценки напряженного состояния Земной коры [1].

Связь между напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ для трансверсально-изотропного массива аналогична случаю изотропного тела [1, 2] и имеет следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{1,1} \cdot \sigma_x + a_{1,2} \cdot \sigma_y + a_{1,3} \cdot \sigma_z; \gamma_{xy} = 2(a_{1,1} - a_{1,2})\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= a_{1,2} \cdot \sigma_x + a_{2,2} \cdot \sigma_y + a_{2,3} \cdot \sigma_z; \gamma_{zy} = a_{4,4}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= a_{1,3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + a_{3,3} \cdot \sigma_z; \gamma_{xz} = a_{5,5}\tau_{xz}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этом случае количество независимых констант равно 5. Такое тело принято Лявье и названо трансверсально-изотропным телом. По закону Гука для изотропного массива E, ν – две независимые константы.

Граничные условия для двумерного случая имеют вид:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = X_n; \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = Y_n. \quad (2)$$

На поверхности полупространства заданы внешние силы, которые действуют нормально и по касательной к дневной поверхности земли. Обозначим такие внешние силы N и T , которые направлены нормально и по касательной к границе полуплоскости. Для трансверсального массива разрешающий дифференциальный оператор имеет вид

$$L_4 = \beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial y \cdot \partial x^3} + (2\beta_{16} + \beta_{26}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x \cdot \partial y^3} + \beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \quad (3)$$

Корни характеристического уравнения этого дифференциального оператора находим с помощью программы МАТКАД [1]:

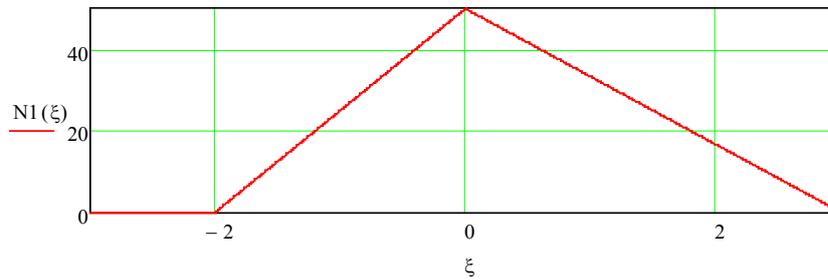


Рисунок 1 – Расчетная схема нагрузки для неравнобокой треугольной эпюры

$$\mu^4 + n\mu^2 + k^2; k = \sqrt{\frac{E_1 - \nu_2^2}{E_2 - \nu_1^2}}; n = \sqrt{\frac{E_1 - 2\nu_2(1 + \nu_2)}{G_2 - \nu_1^2} + 2k}. \quad (4)$$

Когда анизотропная среда испытывает плоское деформированное или плоское напряженное состояние, то по аналогии с методом Мусхелишвили [2], как это впервые было представлено С.Г. Лехницким [3], имеет место представление компонентов напряжений через комплексные потенциалы со сложными комплексными аргументами:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} F; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}. \quad (5)$$

Положив корни характеристических уравнений в (4), найденных по аналогии с функций Мусхелишвили [2], С.Г. Лехницким [3] были введены функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$, аргументы которых образуются от обычных переменных x и y путём

$$x_k = x + \alpha_k y; \quad y_k = \beta_k y.$$

Здесь α_k действительные и β_k – мнимые части корней характеристического уравнения. Причем из возможных четырех корней μ в [3] рекомендуется выбрать только те корни, у которых мнимые части имеют положительный знак. В рассмотренном ниже примере вычисленные значения первых двух корней отвечают этим требованиям.

Когда на контуре заданы внешние нагрузки (первая основная задача), формулируются следующие граничные задачи:

$$2 \operatorname{Re}(\Phi_1 + \Phi_2) = \int_0^s N ds; \quad 2 \operatorname{Re}(\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2) = \int_0^s -T ds. \quad (6)$$

После определения двух функций Φ_k ($k = 1, 2$) вычисление компонентов напряжений особых затруднений не вызывает. Это обусловлено тем, что, во-первых, программный комплекс МАТКАД находит решение характеристических уравнений как аналитическими, так и численными методами; во-вторых, составление программ расчета полей напряжений без навыков программирования записывается аналогично записи алгебраических выражений школьной программы на странице экрана компьютера; в-третьих, разделение действительной части от мнимых выражений комплексных переменных выполняется в ПК более надёжно и без технических ошибок; в-четвертых, графическое оформление результатов расчета с помощью МАТКАД [4] является наиболее продвинутым разделом в области автоматизации проведения научных исследований.

Нормальные нагрузки N действуют на контур полуплоскости $y = 0$. Общие решения от действия распределенных нагрузок приведены в работах [2, 3] представлены через комплексные потенциалы Φ_1 и Φ_2 . Для изотропного тела Φ_k имеют простые аргументы: $z(x, y) = x + iy$ и $\bar{z}(x, y) = x - iy$.

Нагрузка треугольная неравнобокая на контуре изотропной полуплоскости. Пусть L_1 – начало, а L_2 – конец возрастающей половины треугольной нагрузки; L_3 – начало, а L_4 – конец убывающей ветви треугольной нагрузки. Присвоим для конкретности (см. рисунок 1):

$$L_2 = 0; \quad L_1 = -2; \quad L_4 = 3, 0; \quad L_3 = 0;$$

$$N_1(\xi) = \begin{cases} nn \leftarrow 0 & \text{if } (\xi < L_1 \wedge \xi > L_4) \\ nn \leftarrow \frac{L_1 - \xi}{L_1} p_0 & \text{if } (L_1 < \xi \leq L_2) \\ nn \leftarrow \frac{L_4 - \xi}{L_4} p_0 & \text{if } (L_3 < \xi \leq L_4) \end{cases} .$$

От действия нагрузки N_1 граничные задачи для комплексных потенциалов [2, 3] имеют следующий вид:

$$\Phi_1([x, y) = K_1 \left\{ [L_1 - z(x, y)] \cdot \ln \left[\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right] + (L_1 - L_2) \right\};$$

$$\Phi_{1p}([x, y) = K_1 \left\{ -\ln \left[\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right] + [L_1 - z(x, y)] \cdot \left[\frac{-1}{L_2 - z(x, y)} + \frac{1}{L_1 - z(x, y)} \right] \right\};$$

$$\Phi_2([x, y) = K_2 \left\{ [L_4 - z(x, y)] \cdot \ln \left[\frac{L_4 - z(x, y)}{L_3 - z(x, y)} \right] + (L_3 - L_4) \right\};$$

$$\Phi_{2p}([x, y) = K_2 \left\{ -\ln \left[\frac{L_4 - z(x, y)}{L_3 - z(x, y)} \right] + [L_4 - z(x, y)] \cdot \left[\frac{-1}{L_4 - z(x, y)} + \frac{1}{L_3 - z(x, y)} \right] \right\},$$

где $K_1 = \frac{-P_0}{2\pi i(L_1 - L_2)}$; $K_2 = \frac{-P_0}{2\pi i(L_4 - L_3)}$;

$$\psi_1(x, y) = -z(x, y)\Phi_{1p}(x, y); \quad \psi_2(x, y) = -z(x, y)\Phi_{2p}(x, y); \quad \psi(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2(x, y);$$

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y); \quad \Phi_p(x, y) = \Phi_{1p}(x, y) + \Phi_{2p}(x, y);$$

$$S_1(x, y) = 4\text{Re}[\Phi(x, y)]; \quad S_2(x, y) = 2 \left[z(x, y) \cdot \Phi_p(x, y) + \Psi(x, y) \right]; \quad S_3(x, y) = 4\text{Re}[S_2(x, y)];$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{S_1(x, y) - S_3(x, y)}{2}; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{S_1(x, y) + S_3(x, y)}{2}; \quad \tau_{xy}(x, y) = \frac{\text{Im}[S_2(x, y)]}{2}.$$

По закону Гука [2] для изотропного тела компоненты деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ вычисляются через напряжения:

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{\sigma_x(x, y) - \nu\sigma_y(x, y)}{E}; \quad \gamma_{xy}(x, y) = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}(x, y); \quad \varepsilon_y(x, y) = \frac{\sigma_y(x, y) - \nu\sigma_x(x, y)}{E}.$$

Для выполнения расчетов принято $E = 2,2 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,4$. Для горизонтальных сечений при $y = -0,01; -2; -3; -3,5$ построены эпюры напряжений σ_x (рисунок 2), σ_y (рисунок 3), τ_{xy} (рисунок 4) и эпюры деформаций γ_{xy} (рисунок 5). На рисунках 6, 8, 10 представлены поверхности напряжений, а изолинии их распределений – на рисунках 7, 9, 11.

Для случая песчанистого сланцевого горного массива комплексные переменные имеют сложные аргументы: $z_1(x, y) = x + m_1 y$ и $z_2(x, y) = x + m_2 y$, где $m_1 = i \times 1,662$ и $m_2 = i \times 0,937$. Комплексные потенциалы определены с помощью общего решения в [3] и найдены для случая действия треугольной нагрузки (см. рисунок 1). Соотношения для найденных потенциалов имеют следующий вид:

$$\Phi_{01}(x, y) = r_1 \left\{ [L_1 - z_1(x, y)] \cdot \ln \frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_1 - z_1(x, y)} - (L_2 - L_1) \right\};$$

$$\Phi_{02}(x, y) = r_2 \left\{ [L_4 - z_1(x, y)] \cdot \ln \frac{L_4 - z_1(x, y)}{L_3 - z_1(x, y)} - (L_4 - L_3) \right\};$$

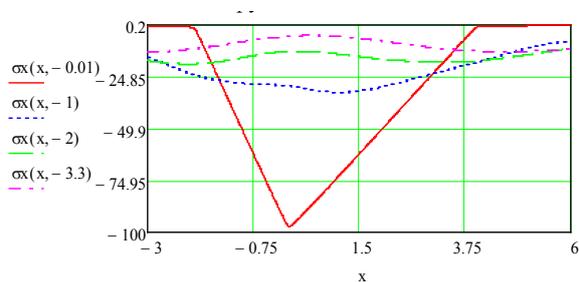


Рисунок 2 – Эпюры напряжений σ_x

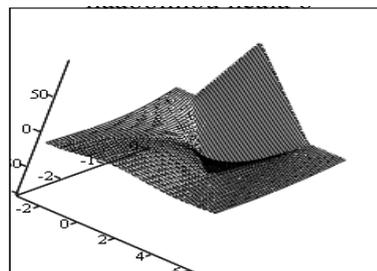


Рисунок 6 – Поверхность σ_x

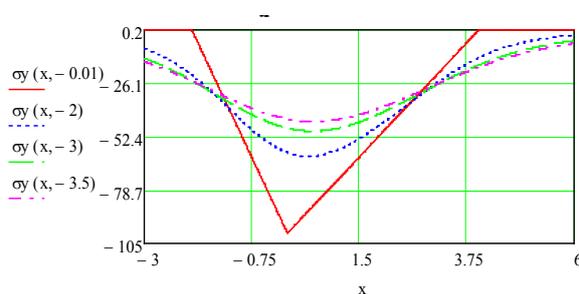


Рисунок 3 – Эпюры напряжений σ_y

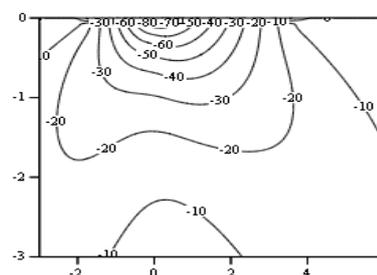


Рисунок 7 – Изолинии σ_x

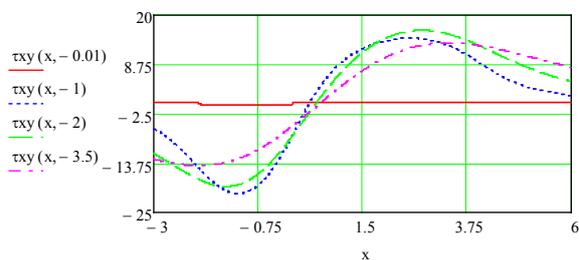


Рисунок 4 – Эпюры касательных напряжений

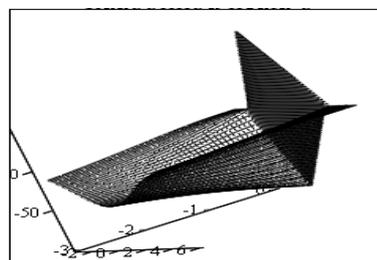


Рисунок 8 – Поверхность σ_y

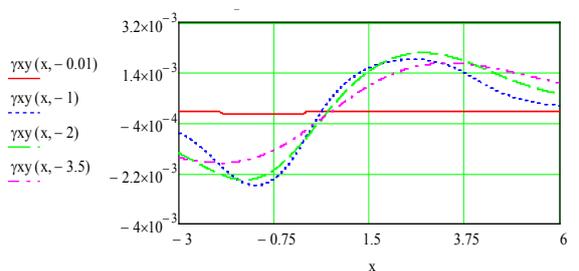


Рисунок 5 – Эпюры сдвиговых деформаций

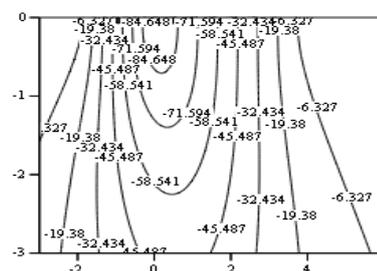


Рисунок 9 – Изолинии σ_y

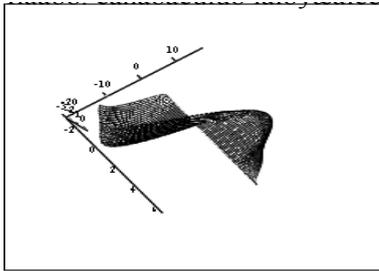


Рисунок 10 – Поверхность касательных напряжений

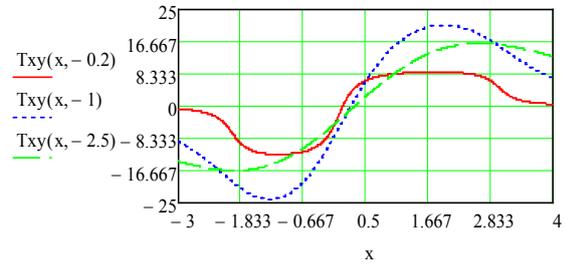


Рисунок 14 – Эпюры τ_{xy}

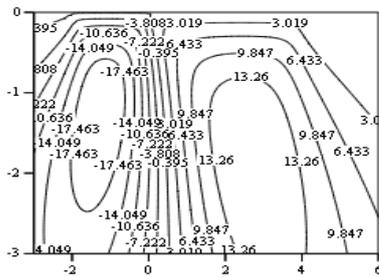


Рисунок 11 – Изолинии касательных напряжений

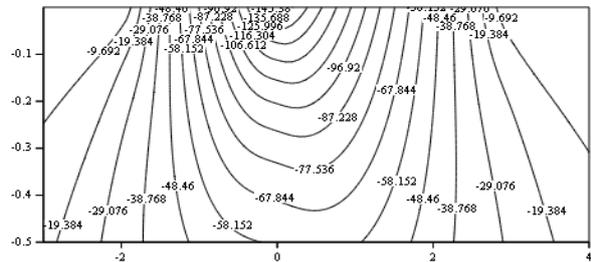


Рисунок 15 – Изолинии σ_x

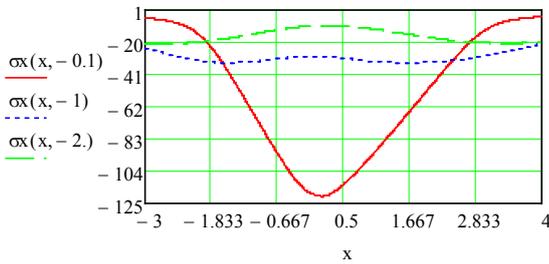


Рисунок 12 – Эпюры σ_x

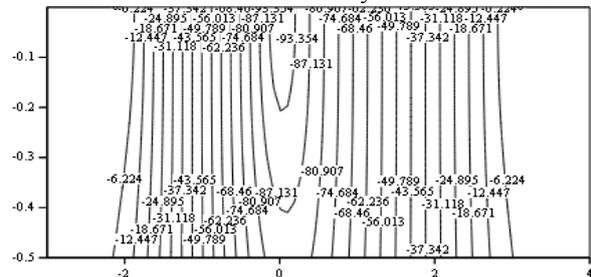


Рисунок 16 – Изолинии σ_y

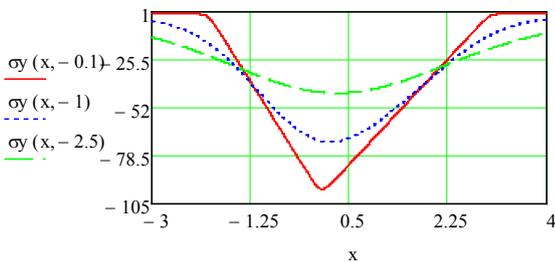


Рисунок 13 – Эпюры σ_y

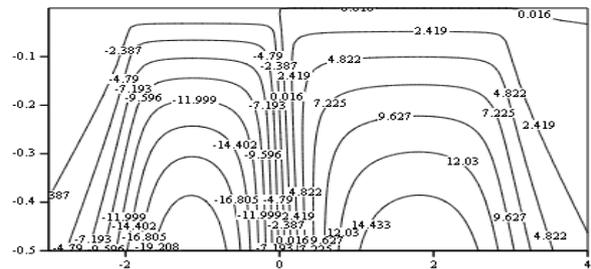


Рисунок 17 – Изолинии τ_{xy}

$$\Phi_{21}(x, y) = r_3 \left\{ [L_1 - z_2(x, y)] \cdot \ln \frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_1 - z_2(x, y)} - (L_2 - L_1) \right\};$$

$$\Phi_{22}(x, y) = r_4 \left\{ [L_4 - z_2(x, y)] \cdot \ln \frac{L_4 - z_2(x, y)}{L_3 - z_2(x, y)} - (L_4 - L_3) \right\};$$

$$\text{где } r_1 = \frac{P_0 \mu_2}{L_1} \Delta_0; \quad r_2 = \frac{P_0 \mu_2}{L_4} \Delta_0; \quad r_3 = \frac{P_0 \mu_1}{L_1} \Delta_0; \quad r_4 = \frac{P_0 \mu_1}{L_4} \Delta_0; \quad \Delta_0 = \frac{1}{2\pi i (\mu_1 - \mu_2)}.$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{01}(x, y) + \Phi_{02}(x, y); \quad \Phi_2(x, y) = \Phi_{21}(x, y) + \Phi_{22}(x, y).$$

Компоненты напряжений определяются формулами:

$$\sigma_x(x, y) = 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi_1(x, y) + \mu_2^2 \Phi_2(x, y)];$$

$$\sigma_y(x, y) = 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)];$$

$$T_{xy}(x, y) = -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1(x, y) + \mu_2 \Phi_2(x, y)].$$

На рисунках 12–14 построены эпюры компонентов напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} для полуплоскости, свойства которой являются песчанистым сланцем.

На рисунках 15–17 представлены закономерности распределения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в виде изолиний равных значений напряжений для анизотропной полуплоскости в окрестности нагруженного участка контура полуплоскости.

Таким образом, дано аналитическое решение граничных задач для изотропной и анизотропной полуплоскости, когда на ее контуре действует распределенная нагрузка. Эпюры нагрузок имеют вид неравнобокого треугольника. Выполнены расчеты распределения напряжений и установлены закономерности распределения их напряжений в изотропной и анизотропной полуплоскостях.

Построены эпюры распределения напряжений для различных глубин в горизонтальных сечениях полуплоскостей, которые указывают на правильность выполнения граничных условий полученных решений граничных задач.

Литература

1. Жумабаев Б.Ж. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом / Б.Ж. Жумабаев. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.
4. Кирьянов Д.В. Матсад 14 / Д.В. Кирьянов. СПб.: БХВ-Петербург. 704 с.