УДК 517.9
DOI: 10.36979/1694-500X-2024-24-8-4-9

ОТ УРАВНЕНИЙ БЕРНУЛЛИ К УРАВНЕНИЯМ РИКАТТИ И АБЕЛЯ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Аннотация. Рассматривается развитие метода интегрирующего множителя, который используется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Показано, как, используя основную идею этого метода, можно успешно решать уравнения Бернулли и некоторый довольно широкий класс уравнений, которые названы обобщенными уравнениями Бернулли. Частными случаями таких уравнений являются подмножества уравнений Риккати и Абеля. Изложенный метод особенно выгоден тем, кто использует дифференциальные уравнения для решения практических задач, в частности для инженеров.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; интегрирующий множитель; уравнения Бернулли; уравнения Риккати; уравнения Абеля; прямое интегрирование дифференциальных уравнений.

БЕРНУЛЛИ ТЕҢДЕМЕЛЕРИНЕН РИКАТТИ ЖАНА АБЕЛЬДИН ТЕҢДЕМЕЛЕРИНЕ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Аннотация. Макалада биринчи тартиптеги сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелерди чыгарууда колдонулуучу интегралдоо фактор ыкмасын жалпылоо каралган. Бул ыкманын негизги идеясын колдонуп Бернулли теңдемелерин жана жалпыланган Бернулли теңдемелери деп биз атаган бир кыйла кеңири класстагы теңдемелерди, кантип ийгиликтүү чыгарса болору көрсөтүлгөн. Мындай теңдемелердин өзгөчө учурлары Риккати жана Абел теңдемелеринин көптүкчөлөрүн түзүшөт. Берилген ыкма, өзгөчө, дифференциалдык теңдемелерди практикалык маселелерди чечүү үчүн колдонгондор үчүн, атап айтканда, инженерлер үчүн пайдалуу.

Түйндүү сөздөр: сызыктуу кадимки дифференциалдык теңдемелер; интегралдоо фактор; Бернулли теңдемеси; Риккати теңдемеси; Абель теңдемеси; дифференциалдык теңдемелерди түз чыгаруу.

FROM BERNOULLI EQUATIONS TO THE RICCATI AND ABEL EQUATIONS

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, E.S. Burova

Abstract. The work is devoted to the development of the integrating factor method, which is used to solve linear ordinary differential equations of the first order. It is shown how, using the basic idea of this method, one can successfully solve Bernulli's equations and a certain fairly wide class of equations, which are called generalized Bernulli's equations. Special cases of such equations are subsets of the Riccati and Abel equations. The presented method is especially beneficial for those who use differential equations to solve practical problems, in particular for engineers.

Keywords: Linear ordinary differential equations; integrating factor; Bernulli equations; Riccati equations; Abel's equations; direct integration of differential equations.

Введение. Через небольшой, по историческим меркам, промежуток времени после начала изучения обыкновенных дифференциальных уравнений выяснилось, что не все они могут быть проинтегрированы в квадратурах [1, 2]. Поэтому, очень актуальными стали исследования, посвященные поиску методов решений уравнений в возможных случаях. На этом пути были очень тщательно исследованы линейные уравнения первого порядка. Как правило, в стандартных учебных курсах рассматриваются метод вариации произвольной постоянной и метод поиска решения в виде произведения двух функций. При этом очень часто не дается ответ на вопрос «въедливого» слушателя: «А почему так можно действовать?» Для такого случая выигрышным является метод интегрирующего множителя, видоизмененный вариант которого является основой данной работы. Этот подход оказался весьма продуктивным. Его можно использовать и для уравнений Бернулли, и для весьма широкого семейства дифференциальных уравнений, которые мы назвали обобщенными уравнениями Бернулли.

1. Возможно, линейные уравнения первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

являются наиболее хорошо изученными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Равенство $y' + p(x)y = (ye^{\int p(x)dx})'e^{-\int p(x)dx}$ обеспечивает интегрируемость в квадратурах уравнения (1).

Задача 1

Решить уравнение: $y' + 2xy = 3\sqrt{x}e^{-x^2}$. (2)

Левую часть уравнения (2) можно «факторизовать»:

$$y' + 2xy = (ye^{\int 2xdx})'e^{-\int 2xdx} = (ye^{x^2})'e^{-x^2}.$$

Поэтому,

$$y' + 2xy = 3\sqrt{x}e^{-x^2} \Leftrightarrow \left(ye^{x^2}\right)' e^{-x^2} = 3\sqrt{x}e^{-x^2} \Leftrightarrow \left(ye^{x^2}\right)' = 3x^{0.5} \Rightarrow$$

$$ye^{x^2} = \frac{3x^{1.5}}{1.5} + C \Rightarrow y = e^{-x^2}\left(2x^{1.5} + C\right).$$

2. Так как левая часть уравнений Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \tag{3}$$

имеет такой же, как у уравнений (1) вид, для решения таких уравнений также можно использовать вышеуказанное равенство. Проиллюстрируем этот подход следующим примером.

Задача 2

Решить уравнение [3]:

$$\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = 4\sqrt{y\left(1 + x^2\right)} \cdot arctgx. \tag{4}$$

Приведем уравнение к стандартному виду: $y' - \frac{2x}{1 + x^2}y = 4\sqrt{\frac{y}{1 + x^2}} \cdot arctgx$. Так как $\int \frac{-2x}{1 + x^2}dx = -\int \frac{d\left(1 + x^2\right)}{1 + x^2} = ln\frac{1}{1 + x^2} + lnA$, получаем: $e^{\int \frac{-2x}{1+x^2}dx} = e^{ln\frac{1}{1+x^2} + lnA} = \frac{A}{1 + x^2}$. Поэтому, уравнение (4) можно записать в виде $\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'\left(1+x^2\right)=4\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\cdot arctgx$, которое является уравнением с разделяющимися переменными. В этом легко убедится, использовав обозначение $\frac{y}{1+x^2}=z$. Тогда,

$$\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'\left(1+x^2\right)=4\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\cdot arctgx\Rightarrow\left(\frac{y}{1+x^2}\right)'=4\sqrt{\frac{y}{1+x^2}}\cdot\frac{arctgx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow z'=4\sqrt{z}\cdot\frac{arctgx}{1+x^2}\Rightarrow\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{4arctgx}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{4arctgx}{1+x^2}dx\Rightarrow\frac{dz}{\sqrt{z}}=4d(arctgx)\Rightarrow\sqrt{z}=arctg^2x+C.$$

Осталось вернуться к исходным переменным и записать общее решение уравнения (4):

$$y=\left(1+x^2\right)^2\left(arctg^2x+C\right)^2.$$

При этом нужно не забыть решение y = 0.

3. Множество дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах, заметно расширится, если в уравнениях вида (3) вместо искомой функции *y* рассматривать функцию *fy + g*. Назовем уравнения

$$y'+p(x)(fy+g)=q(x)(fy+g)^m, \tag{4}$$

где *f, g, m* – некоторые числа, обобщенными уравнениями Бернулли.

Уравнения (4) будут линейными при $m = 0$; уравнениями Бернулли при $g = 0$.

Покажем, что уравнения вида (4) можно проинтегрировать, использовав метод, похожий на изложенный ранее. Для этого достаточно убедиться в том, что имеет место равенство:

$$y'+p(x)(fy+g)=\left[(fy+g)e^{f\int p(x)dx}\right]'\frac{1}{f}e^{-f\int p(x)dx}. \tag{5}$$

Докажем равенство (5). Для этого вычислим производную от выражения в квадратных скобках, рассматривая его как произведение двух функций:

$$\left[(fy+g)e^{f\int p(x)dx}\right]'=fy'e^{f\int p(x)dx}+(fy+g)fp(x)e^{f\int p(x)dx}==\{y'+(fy+g)p(x)\}fe^{f\int p(x)dx}.$$

Задача 3

Решить уравнение: $y'+2(2y+1)=e^{21x}(2y+1)^5$. (6)

Используем равенство (5) и перепишем уравнение (6): $\left[(2y+1)e^{4x}\right]'\frac{1}{2}e^{-4x}=e^{21x}(2y+1)^5$.

Тогда $\left[(2y+1)e^{4x}\right]' = 2e^{25x}(2y+1)^5 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \left[(2y+1)e^{4x}\right]' = 2e^{5x}\left[e^{4x}(2y+1)\right]^5$. Теперь разделим переменные: $\dfrac{d\left[(2y+1)e^{4x}\right]}{\left[(2y+1)e^{4x}\right]^5} = 2e^{5x}dx$, проинтегрируем и получим: $\dfrac{\left[(2y+1)e^{4x}\right]^{-4}}{-4} = \dfrac{2}{5}(e^{5x}+C)$.

В итоге, общее решение уравнения (6): $\dfrac{5}{-8} = (e^{5x}+C)\left[(2y+1)e^{4x}\right]^4$.

Для того чтобы получить полное решение, нужно не забыть решение y = –0,5, которое могло быть потеряно при разделении переменных.

4. Исторически так сложилось, что значительная часть исследований в области обыкновенных дифференциальных уравнений связана с уравнениями Риккати [4, 5]:

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2. \tag{7}$$

Уравнения (4) при $m = 2$ будут уравнениями Риккати. Переписав их в виде $y' = (fy+g)\left[-p(x) + q(x)(fy+g)\right]$, можем убедиться в том, что имеют место уравнения, одно из решений которых является числом: $y = -g/f$.

Такие уравнения можно приводить к линейным путем деления на $(fy+g)^2$ [6]. Мы продемонстрируем другой метод, основанный на равенстве (5).

Задача 4

Решить уравнение Риккати: $xy' - 0.5y - 1 = x^3(y+2)^2$. (8)

Разделим уравнение на x и вынесем *4* из скобок: $y' - \dfrac{1}{x}(0.5y+1) = x^2 4(0.5y+1)^2$. В итоге приходим к стандартному виду обобщенных уравнений Бернулли – к виду (4). Следовательно, можно воспользоваться равенством (5) и получить уравнение:

$$\left[(0.5y+1)\frac{1}{\sqrt{x}}\right]' \frac{1}{0.5}\sqrt{x} = x^2 4(0.5y+1)^2.$$

Тогда $\left[(0.5y+1)\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right]' = 2x^{2.5}\left((0.5y+1)\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

Отсюда $\displaystyle\int \frac{d\left[(0.5y+1)\frac{1}{\sqrt{x}}\right]}{\left[(0.5y+1)\frac{1}{\sqrt{x}}\right]^2} = \int 2x^{2.5}dx$. Таким образом, $\dfrac{-1}{\left[(0.5y+1)\frac{1}{\sqrt{x}}\right]} = \dfrac{x^{3.5}}{3.5} + C$.

Запишем общее решение уравнения (8) в виде: $\left(\dfrac{x^{3.5}}{3.5} + C\right)(0.5y+1) = -x^{0.5}$.

И как, наверное, уже стало привычным, добавим решение $y = -2$.

5. Одним из самых значительных событий научной жизни Италии XVI века явились математические сражения, в ходе которых изобретались и совершенствовались методы решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. В историю человечества вошли Спицион дель Ферро, Николы Тарталья, Джероламо Кардано, Людовико Феррари – ученые, отличившиеся в этих битвах. В течение двух последующих столетий математики безуспешно пытались продвинуться дальше – придумать и развить методы решения алгебраических уравнений пятой и выше степени. Были получены некоторые частные результаты, но общий случай никак не получался. Это продолжалось до тех пор, пока за дело не взялся Нильс Генрик Абель. В один прекрасный день он пришел к мысли, что нужно понять, почему оказалось возможным написать формулы для уравнений четвертого и меньших степеней. Поняв это, он сумел доказать, что получить формулу корней для уравнений пятой и выше степени общего вида невозможно. Это выдающийся результат – одно из величайших достижений в истории математики, которое было получено гениальным человеком. Гениальность Абеля подчеркнута большим числом математических понятий – абелевы интегралы, функции, многообразия, признаки сходимости, … – названых его именем [7]. Одним из этих объектов являются обыкновенные дифференциальные уравнения Абеля:

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2 + d(x)y^3. \tag{9}$$

Несложно понять, что уравнения (4) при $m = 3$ будут являться частным случаем уравнений Абеля. Продемонстрируем, как метод, основанный на равенстве (5), работает в этом случае.

Задача 5

Решить уравнение Абеля:

$$y' + 2ctgx \cdot (y+1) = x^3 (y+1)^3 \sin^4 x. \tag{10}$$

Для того чтобы воспользоваться равенством (5), вычислим соответствующий интеграл: $\int 2ctgx dx = 2\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = 2\int \frac{d \sin x}{\sin x} = 2\ln|\sin x| + \ln A = \ln(A\sin^2 x)$. В итоге, уравнение (10) перепишется в виде: $\left((y+1)\sin^2 x\right)' \frac{1}{\sin^2 x} = x^3 (y+1)^3 \sin^4 x$. Тогда $\int \frac{d\left[(y+1)\sin^2 x\right]}{\left[(y+1)\sin^2 x\right]^3} = \int x^3 dx$. Таким образом, $\frac{1}{-2\left[(y+1)\sin^2 x\right]^2} = \frac{x^4}{4} + C$.

Отсюда $-2 = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)\left[(y+1)\sin^2 x\right]^2$. Осталось добавить решение $y = -1$.

Заключение. Процитируем великого Иоганна Вольфганга Гёте: «Все стоящее уже давно придумано, надо только не бояться попробовать перепридумать это еще раз». Мы решили последовать словам Гёте и в данной работе, основываясь на методе интегрирующего множителя, который обычно связывают с именем великого ученого Леонарда Эйлера, предлагаем новый метод. Он позволяет успешно интегрировать линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Не ограничиваясь этим, этот метод позволяет интегрировать широкое семейство уравнений, включающее уравнения Бернулли, частные случаи уравнений Риккати и Абеля.

Поступила: 12.08.24; рецензирована: 26.08.24; принята: 28.08.24.

Литература

1. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. СПб.: Лань, 2003. 832 с.
2. *Boyce W.E.* Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems / W.E. Boyce, R.C. DiPrima. New York, Wiley, 2012. 832 p.
3. *Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения. Практический курс / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высшая школа, 2006. 383 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. СПб.: Лань, 2003. 576 с.
5. *Polyanin A.D.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problem / A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev // Chapman & Hall / CRC Press, Boca Raton. 2017. 1496 p.
6. *Кыдыралиев С.К.* Некоторые уравнения Риккати, интегрируемые в квадратурах / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, О.Б. Забинякова // Вестник КРСУ. 2023. Т. 23. № 4. С. 4–10.
7. *Смышляев В.К.* О математике и математиках / В.К. Смышляев. Йошкар-Ола: Марийское, 1977. 224 с.