УДК 517.97

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ФРЕДГОЛЬМОВЫМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

***Э.Ф. Абдылдаева, А.К. Керимбеков***

Исследованы вопросы однозначной разрешимости краевой задачи управляемого колебательного процесса, описываемого фредгольмовым интегро-дифференциальным уравнением в частных производных, при наличии внешних и граничных источников. Разработан алгоритм построения обобщенного решения краевой задачи, построены приближенные решения краевой задачи и доказаны их сходимость.

*Ключевые слова:* краевая задача; обобщенное решение; приближенное решение; сходимость; функции внешних и граничных источников.

# APPROXIMATE SOLUTION OF THE NONHOMOGENEOUS BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE PROCESS OF OSCILLATION DESCRIBED BY THE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

***E.F. Abdyldaeva, A.K. Kerimbekov***

The article investigates one-valued solvability of the boundary value problem for the oscillation process described by the fredholm integro-differential equation in partial derivatives. The algorithm for constructing of the generalized solution of the boundary value problem is developed, approximate solutions of this problem are constructed and proved its convergence.

*Keywords: boundary* value problem; generalized solution; approximate solutions; convergence; functions of external and boundary sources.

## 1. Построение обобщенного решения краевой задачи

Пусть состояние колебательного процесса описывается скалярной функцией $V(t,x)$, которая в области $Q_T = Q\times(0,T]$, где $Q$ – область пространства $R^n$ ограниченная кусочно-гладкой кривой $\gamma$, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению [1, 2]:

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + g(t,x)f[t,u(t)], x\in Q\subset R^n, 0<t\le T, \qquad (1.1)$$

а на границах области $Q$ начальному

$$V(0,x)=\psi_1(x),\ V_t(0,x)=\psi_2(x),\ x\in \mathrm{Q}, \qquad (1.2)$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) = \sum_{i,j=1,n}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i) + a(x)V(t,x) = b(t,x)p[t,v(t)], x\in\gamma, 0<t\le T \qquad (1.3)$$

условиям, где $A$ – эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i} - c(x)V(t,x),$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0>0,$$

где $\delta$ – вектор нормали исходящий из точки $x \in \gamma$; $T$ – фиксированный момент времени, $K(t,\tau)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau\,dt = K_0 < \infty; \tag{1.4}$$

$$g(t,x) \in H(Q_T), \psi_1(x) \in H_1(Q_T), \psi_2(x) \in H(Q_T), b(t,x) \in H(\gamma_T),\ \gamma_T = \gamma \times (0,\mathrm{T})$$

$a(x) \ge 0, c(x) \ge 0$ – известные функции; заданные функии $f[t,u(t)] \in \mathrm{H}(0,\mathrm{T})$ *и* $p[t,v(t)] \in \mathrm{H}(0,\mathrm{T})$ удовлетворяют условиям монотонности

$$f_u[t,u(t)] \ne 0 \quad и \quad p_v[t,v(t)] \ne 0,\ \ \forall t \in [0,\mathrm{T}] \tag{1.5}$$

при любых управлений $u(t) \in \mathrm{H}(0,\mathrm{T})$ *и* $v(t) \in \mathrm{H}(0,\mathrm{T})$; $\lambda$ – параметр.

Известно, что при условиях (1.5) краевая задача (1.1)–(1.3) не имеет классического решения [3]. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.3).

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \tag{1.6}$$

где $V_n(t) = \langle V(t,x), z_n(x)\rangle = \int_Q V(t,x) z_n(x)dx$ – коэффициенты Фурье, а функции $z_n(x)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots,$ определяются как обобщенные собственные функции краевой задачи [4]:

$$D_n[\Phi, z_n(x)] = \int_Q \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\Phi_{x_j}(t,x) z_{n_{x_i}}(x) + c(x) z_n(x)\Phi(t,x) \right) dx +$$

$$+\int_\gamma a(x) z_n(x)\Phi(t,x)dx = \lambda_n^2 \int_Q z_n(x)\Phi(t,x)dx, \quad \Gamma v(t,x) = 0$$

и система функций $\{z_n(x)\}$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения $\lambda_n$ удовлетворяет следующим условиям: $\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \forall n = 1,2,3,\ldots,\ \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$

*Определение 1.1.* Под обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $V(t,x) \in H(\mathrm{Q}_T)$, которая удовлетворяет начальным условиям (1.2) в слабом смысле, т. е. для любой функции $\phi_0(x) \in H(Q), \phi_1(x) \in H(Q)$ имеют место равенства:

$$\lim_{t\to+0}\int_Q V(t,x)\phi_0(x)dx = \int_Q \psi_1(x)\phi_0(x)dx,\ \lim_{t\to+0}\int_Q V_t(t,x)\phi_1(x)dx = \int_Q \psi_2(x)\phi_1(x)dx,$$

и интегральному тождеству:

$$\int_Q \left[(V_t\Phi) - (V\Phi_t)\right]_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[ -V\Phi_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) V_{x_j}(t,x)\Phi_{x_i}(t,x) - cV(t,x)\Phi(t,x) \right] dtdx +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[b(t,x)p[t,v(t)] - a(x)V(t,x)\right]\Phi(t,x)dtdx + \int_{t_1}^{t_2}\int_Q \left[ \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + g(t,x)f[t,u(t)] \right]\Phi(t,x)dtdx \tag{1.7}$$

для любых моментов времени $t_1$ *и* $t_2$ $(0 < t_1 < t_2 < T)$ и для любой функции $\Phi(t,x)$, имеющей обобщенные производные $\Phi_{x_j}(t,x)$ и $\Phi_{tt}(t,x)$.

Для определения коэффициентов Фурье $V_n(t)$, согласно интегральному тождеству (1.7) имеем интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода вида

$$V_n(t) = \lambda\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds + q_n(t), \tag{1.8}$$

где

$$K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ K_n(0,s) = 0 \tag{1.9}$$

$$q_n(t)=\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_n t+\int_0^t\frac{1}{\lambda_n}sin\lambda_n(t-\tau)\big(g_n(\tau)f[\tau,u(\tau)]+b_n(\tau)p[\tau,v(\tau)]\big)d\tau. \qquad (1.10)$$

Решение интегрального уравнения (1.8) находим по формуле [5]:

$$V_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t), \qquad (1.11)$$

где $R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ n=1,2,3,\ldots,$ (1.12)

резольвента ядра $K_n(t,s)\equiv K_{n,1}(t,s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формуле

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\ i=1,2,3,\ldots, \qquad (1.13)$$

при каждом фиксированном $n=1,2,3,\ldots,$. Сходимость ряда Неймана (1.12), согласно оценкам [6], составит:

$$|\mathrm{K}_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i}K_0^{i-1}, \qquad (1.14)$$

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right|\le=\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2(\tau,s)ds\right)^{1/2}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}}=\frac{\sqrt{T}\left(\int_0^T K^2(\tau,s)ds\right)^{1/2}}{\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}},$$

$$\int_0^T\left|R_n(t,s,\lambda)\right|^2ds\le\int_0^T\frac{T\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2}ds=\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0}\right)^2},$$

имеет место для значений параметра $\lambda$, удовлетворяющих неравенству $|\lambda|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1$.

Отметим, что ряд Неймана для значений параметра $\lambda$, удовлетворяющих условию

$$|\lambda|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty, \qquad (1.15)$$

абсолютно сходится при каждом $n=1,2,3,\ldots$ т. е. радиус сходимости ряда Неймана увеличивается с ростом $n$. При этом резольвента $R_n(t,s,\lambda)$, как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией и удовлетворяет оценке

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right|\le\frac{TK_0}{\lambda_n-|\lambda|K_0T^2},\ n=1,2,3,\ldots \qquad (1.16)$$

Заметим, что при выполнении условия

$$|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}$$

ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции при любом фиксированном $n=1,2,3,\ldots$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1)–(1.3) находим по формуле (1.6), где $V_n(t)$ определяется по формуле (1.11) как единственное решение интегрального уравнения (1.8).

*Лемма*. Решение краевой задачи (1.1)–(1.3), определяемое по формуле (1.6), является элементом пространства $H(Q_T)$.

*Доказательство*: учитывая (1.9) и (1.10) непосредственным вычислением имеем следующие неравенства:

$$1)\quad \int_0^T\int_Q V^2(t,x)dxdt=\int_0^T\int_Q\left(\sum_{n=1}^{\infty}V_n(t)\mathrm{z}_n(x)\right)^2dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}V_n^2(t)dt\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right)^2dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t))dt=2\left\{\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\frac{K_0T^2}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\int_0^T q_n^2(s)dsdt+\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}q_n^2(t)dt\right\}\le$$

$$\leq 2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\frac{K_0T^2}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\int_0^T q_n^2(s)ds+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt\right\}\leq 2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt\leq 2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt;$$

2) $$\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}q_n^2(t)dt\leq 3\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{1n}^2+\frac{1}{\lambda_n^2}\psi_{2n}^2+\frac{2}{\lambda_n^2}\left[\int_0^T q_n^2(\tau)d\tau\int_0^T f^2[\tau,u(\tau)]d\tau)+\int_0^T b_n^2(\tau)d\tau\int_0^T p^2[\tau,v(\tau)]d\tau)\right]dt\leq\right.$$

$$\leq 3T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\left(\|\psi_2(x)\|_H^2+2\left(\|g(\mathrm{t},x)\|_{H(Q_T)}^2\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2+\|b(t,x)\|_{H(\gamma_T)}^2\|p[t,v(t)]\|_{H(0,T)}^2\right)\right)\right)=$$

$$=3T\left(\|\psi_1(x)\|_{H(Q)}^2+\left\{\|\psi_2(x)\|_{H(Q)}^2+2\left(\|g(\mathrm{t},x)\|_{H(Q_T)}^2\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2+\|b(t,x)\|_{H(\gamma_T)}^2\|p[t,v(t)]\|_{H(0,T)}^2\right)\right\}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty.$$

На основе этих неравенств легко видеть, что $V(t,x)\in H(Q_T)$.

**2. Приближенные решения краевой задачи и их сходимость**

При определении функции $V_n(t)$, $n=1,2,3,...,$ по формуле (1.11)–(1.12) не всегда удается найти резольвенту $R_n(t,s,\lambda)$. На практике чаще всего рассматривают приближения резольвенты. Усеченный ряд вида

$$R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ n=1,2,3,...,\tag{2.1}$$

называется $m$-ым приближением резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,...,$ .

Функция $V_n^m(t)$, определяемая по формуле

$$V_n^m(t)=\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t),\ n=1,2,3,...,\tag{2.2}$$

называется $m$-ым приближением функции $V_n(t)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,...,$ .

Согласно формуле (1.6) , $m$-ое приближение решения краевой задачи (1.1)–(1.3) находим по формуле:

$$V^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n^m(t)z_n(x),\tag{2.3}$$

где $V_n^m(t)$ имеет вид (2.2). Покажем, что приближенное решение $V^m(t,x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) сходится к точному решению $V(t,x)$ по норме пространства $H(Q_T)$. С учетом (1.12), (1.14), (1.15), (2.1), (2.2) и неравенства

$$\int_{m+1}^{\infty}q^{x-1}dx=\frac{1}{q}\int_{m+1}^{\infty}q^xdx=q^{-1}\left(q^{m+1}+\left.\frac{q^x}{lnq}\right|_{m+1}^{\infty}\right)=q^{-1}q^{m+1}\left(1-\frac{1}{lnq}\right)=q^m\left(1-\frac{1}{lnq}\right),\qquad 0<q<1$$

непосредственным вычислением имеем соотношение:

$$\|V(t,x)-V^m(t,x)\|_H^2=\int_0^T\int_Q\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\int_0^T(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda))q_n(s)ds)z_n(x)\right)^2dxdt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right)q_n(s)ds\right)^2dt\leq\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T\left(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right)^2ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}|K_{n,i}(t,s)|\right)^2ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt\leq\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}\right)^{i-1}\right)^2\frac{T}{\lambda_n^2}$$

$$\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^2T^2K_0}{\lambda_n^2}\right)\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\left(|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n}\right)^{i-1}\right)^2\int_0^T q_n^2(s)ds\leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(s)ds\left(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}}\right)^2 \leq \left(1-\frac{1}{\ln\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}}\right)^2\left(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}\right)^{2m}\times$$

$$\times 3T\left(\|\psi_1(x)\|_{H(Q)}^2+\left[\|\psi_2(x)\|_{H(Q)}^2+2\left(|g(\mathrm{t},x)\|_{H(Q_T)}^2\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\|b(\mathrm{t},x)\|_{H(\gamma_T)}^2\|p[t,v(t)]\|_{H(0,T)}^2\right]\right)\times\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}0\,, \qquad (2.4)$$

из которого следует сходимость приближенного решения при $m\to\infty$.

На практике используемое приближенное решение определяется по формуле:

$$V_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{k}V_n^m(t)z_n(x)=\sum_{n=1}^{k}\left(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right).$$

Покажем, что это решение при $k\to\infty$ сходится к решению $V^m(t,x), \quad \forall m=1,2,3,\ldots$. Это следует из соотношения:

$$\|V^m(t,x)-V_k^m(t)\|_H^2=\int_0^T\int_Q\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T(R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})ds+q_n(t)\right]z_n(x)-\right.$$

$$-\sum_{n=1}^{k}[\lambda\int_0^T(R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}+\mathrm{q}_n(t)]z_n(x))^2\,dxdt=\int_0^T\int_Q(\sum_{n=k+1}^{\infty}[\lambda\int_0^T(R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}+\mathrm{q}_n(t)]z_n(x))^2\,dxdt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds}+q_n(t)\right]^2dt\leq 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\lambda^2\left(\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda\right)^2ds\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t)\right]dt\leq$$

$$\leq 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t)\right]dt\leq 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}\left[\frac{\lambda^2K_0T}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t)\right]dt\leq$$

$$\leq 2\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\right)\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt\xrightarrow[k\to\infty]{}0, \qquad (2.5)$$

так как остаточные суммы сходящихся рядов стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Сходимость приближенных решений $V_k^m(t,x)$ к точному решению $V(t,x)$ следует из соотношения:

$$\|V(t,x)-V_k^m(t,x)\|_{H(Q_T)}\leq$$

$$\|V(t,x)-V^m(t,x)\|_{H(Q_T)}+\|$$

$$V^m(t,x)-V_k^m(t,x)\|_{H(Q_T)}\xrightarrow[m,k\to\infty]{}.$$

которое имеет место согласно (2.4) и (2.5)

***Литература***


1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 6. С. 3–158.
2. *Васильева А.Б.* Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, А.Н. Тихонов. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
5. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
6. *Abdyldaeva Elmira.* Generalized solution of the boundary control problem for the process of oscillation described by the Fredholm Integro-differential equation / Elmira Abdyldaeva, Akylbek Kerimbekov // Bulletin of the Kyrgyz-Slavic University Dergisi. 14(12), 2014. P. 61–67 (in Russian).