

УДК 519.63:532.5

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЕРТИКАЛЬНОЙ КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВОДОЕМЕ

С.Н. Скляр, И.А. Турдушев

Разработан численный метод для расчета вертикальной компоненты вектора скорости движения жидкости в модели ветровых течений в водоеме. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие его эффективность.

Ключевые слова: математическое моделирование; гидродинамика водоемов; вертикальная компонента вектора скорости движения жидкости.

DEVELOPMENT OF DIFFERENCE SCHEME FOR CALCULATION OF VERTICAL COMPONENT OF VELOCITY IN THE THREE-DIMENSIONAL WIND FLOWS MODEL

S.N. Skliar, I.A. Turdushev

A numerical method for calculation of vertical component of velocity vector of liquid motion in the wind flows model was developed. Numerical experiments that demonstrated efficiency of the numerical method were performed.

Keywords: mathematical modeling; hydrodynamics of reservoirs; vertical component of velocity vector of liquid motion.

Введение. При изучении движения жидкости в водоемах в качестве исходной используется система уравнений, состоящая из уравнений движения, статики, неразрывности, переноса тепла и солей с соответствующими граничными и начальными условиями, отражающими воздействие на водоем ветра и других важных факторов [1].

Алгоритм расчета скорости течений, как правило, сводится к последовательному определению из уравнений движения горизонтальных компонент (u и v) вектора скорости, путем вычисления их баротропных [2, 3], и бароклинных составляющих [4], а затем, определения вертикальной компоненты скорости w из уравнения неразрывности несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Следует отметить, что определение вертикальной компоненты скорости из уравнения с использованием обычных разностных схем содержит значительные ошибки [1]. Известна методика определения w из , в которой учитываются особенности поведения горизонтальных компонент скорости u и v , благодаря чему в алгоритме содержатся значительно меньшие ошибки аппроксимации [5]. В основе этой методики лежат: метод обращения динамического оператора [6] и метод определения наклонов уровня [7].

В настоящей работе мы опишем новый метод вычисления вертикальной компоненты скорости, основанный на разностной схеме из [4], и также учитывающий особенности поведения горизонтальных компонент вектора скорости.

Разностная схема и методика расчета вертикальной компоненты скорости. Для вычисления вертикальной компоненты скорости w рассмотрим следующую задачу, которая получается после дифференцирования по переменной z и учета краевых условий для w из исходной модели:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right], & z \in (0, H); \\ w|_{z=0} = 0, & w|_{z=H} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot u|_{z=H} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot v|_{z=H}. \end{cases}$$

В функция $H(x, y) > 0$ описывает рельеф дна, и вся задача зависит от горизонтальной координаты (x, y) как от параметра.

Рассмотрим произвольную неравномерную сетку $\{z_j | j=1, 2, \dots, N\}$ на отрезке $[0, H]$ с шагами $\Delta z_{j+1/2} = z_{j+1} - z_j$ ($j=1, 2, \dots, N-1$) и числом узлов $N = N_{x,y}$, зависящим от фиксированной горизонтальной координаты (x, y) как от параметра. Для аппроксимации задачи используем следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta z_j} \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{\Delta z_{j+1/2}} - \frac{w_j - w_{j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \right) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_j} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j} \right) \right], & j = 2, 3, \dots, N-1; \\ w_1 = 0, \quad w_N = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot u_N + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot v_N. \end{cases}$$

где $\Delta z_j = \frac{1}{2} (\Delta z_{j-1/2} + \Delta z_{j+1/2})$, $j = 2, 3, \dots, N-1$. Для решения задачи необходимо знать значения производных $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial v}{\partial z}$ во внутренних узлах сетки. Конечно-разностная аппроксимация этих значений приводит к значительным ошибкам, поэтому мы предлагаем определять значения производных из соотношений, полученных в работе [4], при построении разностной схемы. С этой целью рассмотрим комплексные скорость $\theta = u + iv$ и вертикальный поток:

$$\Psi = k \frac{\partial \theta}{\partial z} = k \left(\frac{\partial u}{\partial z} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

В работе [4] для любого $j = 1, 2, \dots, N-1$ были получены следующие конечно-разностные соотношения, которые связывают значения этих величин в узлах сетки:

$$\begin{aligned} D_i \theta_j + S_i^\sigma \left[\lambda \cdot \text{cth}(R_{j+1/2}) \cdot \Psi_j - k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \frac{\lambda R_{j+1/2}}{\text{sh}^2(R_{j+1/2})} + i\ell \cdot \theta_j \right] &= F + G_j^0, \\ D_i \theta_{j+1} + S_i^\sigma \left[-\lambda \cdot \text{cth}(R_{j+1/2}) \cdot \Psi_{j+1} + k \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \frac{\lambda R_{j+1/2}}{\text{sh}^2(R_{j+1/2})} + i\ell \cdot \theta_{j+1} \right] &= F + G_{j+1}^0. \end{aligned}$$

В и приняты обозначения: $D_i \theta = (\theta - \theta^0) / \tau$ – оператор разностного дифференцирования; $S_i^\sigma \varphi = \sigma \varphi + (1 - \sigma) \varphi^0$ – оператор осреднения с параметром $\sigma \in [0, 1]$. Эти операторы связывают сеточные функции в моменты времени: t и t_0 , причем: $\tau = t - t_0$, $R_{j+1/2} = \lambda \Delta z_{j+1/2} / 2$, $\lambda = (1 + i) \sqrt{\ell / 2k}$, $\ell = \ell(x, y)$ – параметр Кориолиса; k – коэффициент вертикальной турбулентной вязкости. Величина F в правых частях и содержит функцию, определяющую давление на невозмущенной поверхности, вообще говоря, не известную, и не зависит от координаты z , а G_j^0 – отвечает за адвективный перенос и горизонтальную диффузию и учитывается явно.

Вычтем уравнение из уравнения, предварительно заменив в индекс j на $j-1$. В результате, получим формулы, которые можно использовать для вычисления значений Ψ_j во внутренних узлах сетки ($j = 2, \dots, N-1$):

$$S_i^\sigma \Psi_j = \frac{k}{\text{cth}(R_{j+1/2}) + \text{cth}(R_{j-1/2})} \cdot S_i^\sigma \left[\frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Delta z_{j+1/2}} \cdot \frac{R_{j+1/2}}{\text{sh}^2(R_{j+1/2})} + \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{\Delta z_{j-1/2}} \cdot \frac{R_{j-1/2}}{\text{sh}^2(R_{j-1/2})} \right].$$

После этого, определяем необходимые для решения задачи величины:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_j} = \frac{1}{k} \text{Re}(\Psi_j), \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=z_j} = \frac{1}{k} \text{Im}(\Psi_j), \quad j = 2, 3, \dots, N-1.$$

Заметим, что в формулах нет необходимости использовать значения полных горизонтальных скоростей θ_j : в силу доказанного в работе [4], вместо этих значений можно использовать значения θ_j' вспомогательной функции, которая является решением задачи, без величин F в правых частях уравнений. Эта вспомогательная функция вычисляется на этапе определения бароклинных составляющих горизонтальных компонент скорости, в соответствии с алгоритмом, предложенным в [4].

Численные эксперименты: вычисление вертикальной компоненты скорости. Для демонстрации работы предложенной методики приведем результаты расчетов для тестовой задачи из работы [8]. Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров задачи:

$$\rho_0 = 1, \ell_0 = 1, \beta = 0, r = 1, q = 1, H = 1, k = 0.05, \mu = 0.5, F_1 = 10, F_2 = 0.$$

Относительную погрешность вычисляли по формуле:

$$Error(\phi) = \frac{\max |\phi_{i,j,k} - \tilde{\phi}_{i,j,k}|}{\max |\phi_{i,j,k}|} \cdot 100(\%),$$

где $\phi_{i,j,k}, \tilde{\phi}_{i,j,k}$ – точное и приближенное решения соответственно. Число узлов равномерной сетки по направлениям Ox и Oy выбиралось постоянным и равным 20, число узлов равномерной сетки по направлению Oz (величина N) и шаг сетки по времени τ – варьировались.

На рисунке 1 приведен график погрешности вычисления вертикальной компоненты скорости при $N = 20$ и $\tau = 0.1$. По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат – погрешность. На графике видно, что с течением времени погрешность уменьшается, стабилизируясь на некотором “финальном” уровне.

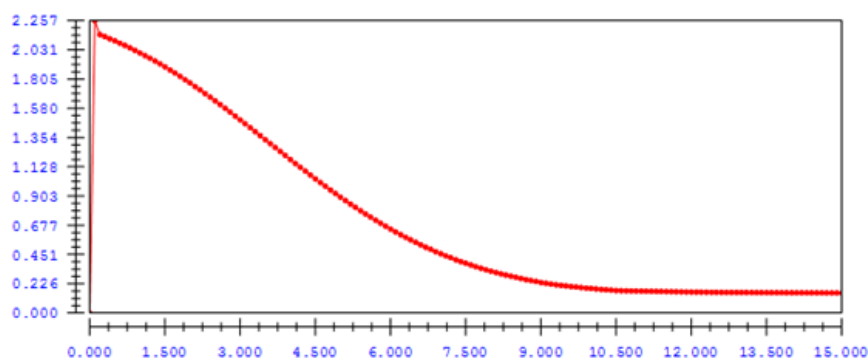


Рисунок 1 – Погрешность вертикальной компоненты при $N = 20, \tau = 0.1$

В таблицах 1 и 2 приведены результаты экспериментов по оценке влияния величин N и τ на точность разностной схемы.

Из данных таблиц 1 и 2 видно, что изменение шага по времени τ при фиксированном числе узлов N на погрешность, как финальную, так и максимальную, практически не влияет. Для схемы, получаемой при $\sigma = 0.5$, увеличение числа узлов N способствует уменьшению финальной и максимальной погрешностей, причем при $N \geq 80$ данные погрешности уменьшаются незначительно. Для схемы при $\sigma = 1$ увеличение N приводит к увеличению финальной и уменьшению максимальной погрешности, причем при $N \geq 80$ данные погрешности изменяются незначительно. Сравнивая данные таблиц 1 и 2, заключаем, что при $N \leq 120$ оптимальнее использовать схему, получаемую при $\sigma = 1$, так как финальная погрешность у нее меньше, чем у схемы при $\sigma = 0.5$. При $N > 120$ можно использовать любую из данных схем, так как погрешности вычислений отличаются незначительно. Разностные схемы, как при $\sigma = 0.5$, так и при $\sigma = 1$, демонстрируют достаточно высокую точность вычислений.

Таблица 1 – Влияние параметров N и τ на точность схемы; $\sigma = 0.5$

Параметры схемы	Погрешность $w, \%$	
	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	1.67	2.26
$N = 20, \tau = 0.05$	1.71	2.26
$N = 40, \tau = 0.1$	0.56	2.09
$N = 40, \tau = 0.05$	0.57	2.10
$N = 80, \tau = 0.1$	0.33	2.05
$N = 120, \tau = 0.1$	0.32	2.04

Таблица 2 – Влияние параметров N и τ на точность схемы; $\sigma = 1$

Параметры схемы	Погрешность $w, \%$	
	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	0.15	2.26
$N = 20, \tau = 0.05$	0.15	2.26
$N = 40, \tau = 0.1$	0.27	2.09
$N = 40, \tau = 0.05$	0.27	2.10
$N = 80, \tau = 0.1$	0.30	2.05
$N = 120, \tau = 0.1$	0.31	2.04

Численные эксперименты: расчет вертикального потока. Были проведены численные эксперименты, направленные на тестирование эффективности формул для расчета вертикального потока. Численные эксперименты также проводили для тестовой задачи из работы [8] с теми же значениями параметров, что и при расчете вертикальной компоненты вектора скорости. В таблицах 3 и 4 приведены максимальные и финальные погрешности вычисления вертикального потока при различных значениях параметров N и τ .

Таблица 3 – Расчет вертикального потока при $\sigma = 0.5$

Параметры схемы	Погрешность $\text{Re}(\Psi)$, %		Погрешность $\text{Im}(\Psi)$, %	
	финальная	максимальная	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	0.43	0.76	0.90	0.90
$N = 20, \tau = 0.05$	0.43	0.77	0.90	0.90
$N = 40, \tau = 0.1$	0.10	0.18	0.23	0.23
$N = 40, \tau = 0.05$	0.10	0.18	0.23	0.23

Таблица 4 – Расчет вертикального потока при $\sigma = 1$

Параметры схемы	Погрешность $\text{Re}(\Psi)$, %		Погрешность $\text{Im}(\Psi)$, %	
	финальная	максимальная	финальная	максимальная
$N = 20, \tau = 0.1$	$2 \cdot 10^{-5}$	0.36	$4 \cdot 10^{-5}$	0.28
$N = 20, \tau = 0.05$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.36	$3 \cdot 10^{-5}$	0.28
$N = 40, \tau = 0.1$	$5 \cdot 10^{-6}$	0.08	$1 \cdot 10^{-5}$	0.07
$N = 40, \tau = 0.05$	$4 \cdot 10^{-6}$	0.08	$1 \cdot 10^{-5}$	0.07

Данные таблиц 3 и 4 показывают, что изменение шага по времени τ при фиксированном числе узлов N практически не влияет на погрешность вычислений. Увеличение числа узлов N способствует уменьшению как финальной, так и максимальной погрешностей. Отметим, что величины погрешностей демонстрируют достаточно высокую точность применяемого подхода к вычислению вертикального потока, причем погрешности при $\sigma = 1$ существенно меньше, чем соответствующие погрешности при значении параметра $\sigma = 0.5$.

Литература

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование циркуляции океана / Г.И. Марчук, А.С. Саркисян. М.: Наука, 1988. 302 с.
2. Sklyar S.N. Computing of barotropic components of motion in problems of water circulation in reservoir / S.N. Sklyar, M.A. Rylov // Study of the Issyk-Kul lake hydrodynamics with the use of isotopic methods, ISTC. Bishkek: Ilim, 2006. Part II. P. 21–30.
3. Турдушев И.А. Построение разностной схемы для расчета интегральных составляющих движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме / И.А. Турдушев // Вестник КРСУ. 2015. Том 15. № 5. С. 91–95.
4. Скляр С.Н. Построение разностной схемы для расчета горизонтальных компонент движения в трехмерной модели ветровых течений в водоеме / С.Н. Скляр, И.А. Турдушев // Вестник КРСУ. 2017. Том 17. № 9.
5. Еремеев В.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов / В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин, С.В. Кочергин, С.Н. Скляр. Севастополь: ЭКОСИ-Гидрофизика, 2001. 238 с.
6. Кочергин В.П. К вопросу обращения динамического оператора в задачах циркуляции жидкости в водоеме / В.П. Кочергин // Изв. АН Киргизской ССР. Физ.-техн. и матем. науки. 1988. №4. С. 3–10.
7. Кочергин В.П. Определение наклонов уровня в задачах динамики водоема / В.П. Кочергин, С.Н. Скляр // Изв. НАН КР. Физ.-техн., матем. и горно-геологич. науки. 1991. №2. С. 15–27.
8. Турдушев И.А. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме. Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: матер. II межд. юбил. конф., посв. 20-летию КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. Бишкек, 5–7 сентября 2013 г. / И.А. Турдушев, С.Н. Скляр; под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. Бишкек: Изд-во Махprint, 2013. Том 2. С. 214–218.