УДК 513.83

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Б. Байзаков, Дж.А. Акерова

Применен метод преобразования решений для доказательства существования решения начальных задач для уравнений в частных производных.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; интегро-дифференциальное уравнение; нелинейное уравнение; уравнение в частных производных; начальная задача.

SOLVABILITY OF CAUCHY PROBLEM FOR NON-LINEAR DIFFERENTIAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

A.B.Baizakov, Dzh. A.Akerova

In the article the method of transformation solutions is applied to the proof of existence solution of initial tasks for partial differential equations.

Keywords: differential equation; integro-differential equation; non-linear equation; partial differential equation; initial task.

Применяется метод преобразования решений [1–3].

I. Рассмотрим задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа:

$$u_{tt}(t,x)+u_{xx}(t,x)=f(t,x,u(t,x)),\ (t,x,u)\in D\times R, \tag{1}$$

$D:=[0,T]\times R$, с начальными условиями

$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{2}$$

$$u_t(0,x)=\psi(x),\ \ x\in R. \tag{3}$$

Условие (А). Пусть функции $\varphi(x),\ \ \psi(x)\in \overline{C}^{\,2}(R)$, а функция

$$f(t,x,u)\in \overline{C}^{\,(2,2,0)}\big(D\times R\big)\cap Lip\big(L|_u\big). \tag{4}$$

Введем обозначение

$$a(x)=i\varphi'(x)+\psi(x). \tag{5}$$

Эта задача Коши эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t,x)=\varphi(x-it)+\int_0^t a(x-it+2is)ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^s f(\rho,x-it+2is-i\rho,u(\rho,x-it+2is-i\rho))d\rho ds\equiv Pu. \tag{6}$$

Из (6) последовательно находя частные производные по t функции u и подставляя в исходное уравнение (1), получим тождество. Кроме того, можно показать, что удовлетворяются и начальные условия (2), (3).

Далее, можно доказать, применяя принцип сжатых отображений к эквивалентному операторному уравнению вида $u = Pu$, где оператор Pu – правая часть уравнения (6), существование и единственность решения задачи Коши (1)–(3), которое принадлежит $C^{(2,2)}([0,T_0]\times R)$.

Очевидно, что из равенства (6) вытекает оценка

$$\|u(t,x)\| \le \left\|\phi(x-it)+\int_0^t a(x-it+2is)ds\right\| +$$
$$+\left\|\int_0^t\int_0^s [f(\rho,x-it+2is-i\rho,u(\rho,x-it+2is-i\rho))d\rho ds\right\| \le q+M\frac{T^2}{2}=const.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (А), тогда существует такое $T_0>0$, что задача Коши (1)–(3) имеет единственное решение в $C^{(2,2)}([0,T_0]\times R)$.

II. Далее рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка

$$u_{xxt}+2\beta u_{xt}+\alpha u_{xx}-\beta^2 u_t+2\alpha\beta u_x+\alpha\beta^2 u=f(t,x,u) \tag{7}$$

с начальным условием (2), где $\alpha,\ \beta\ \in R_+$.

Условие (М):

$$f(t,x,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R])\cap Lip(L_u),\quad \frac{2L_u}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta}<1.$$

Решение задачи (7), (2) ищется в виде

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds\,, \tag{8}$$

где $c(t,x)$ – известная функция, такая, что $c(0,x)=\varphi(x)$; $Q(t,x)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению

Теорема 2. Пусть выполнены условия (М). Тогда нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (7) с начальным условием (2) имеет решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T\times R])$, которое имеет интегральное представление в виде (8).

Доказательство. Последовательно дифференцируем (8) по t и x до нужного порядка и подставляем найденные значения в исходное уравнение (7). После чего, группируя одинаковые члены, получим нелинейное интегральное уравнение Вольтера II рода относительно функции $Q(t,x)$:

$$Q(t,x)=f\left(t,x,c+\int_0^x\int_0^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds\right)-$$
$$-H(t,c(t,x))-\alpha\int_0^x e^{-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,t)dv\equiv P(Q), \tag{9}$$

где обозначено $H(t,x)=c_{ttx}+2\beta c_{tx}-\beta^2 c_t+\alpha c_{xx}+2\alpha\beta c_x+\alpha\beta^2 c.$

Применяя принцип сжатых отображений, можно доказать, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра II рода (9) в шаре

$$Q=\left\{Q(t,x):Q(t,x)\in\overline{C}\left([0,T_0]\times R\right)\cap\|Q(t,x)\|<h\right\}$$

имеет единственное решение $T_0,\ h$.

Исходя из (8), имеем неравенство:

$$\|u(t,x)\| \le \|c(t,x)\| + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \|[1-\sin(x-v)]\| \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} Q(s,v)dvds \le$$

$$\le C_0 + \frac{h}{\alpha\beta} = M_1 = const.$$

Аналогично, в силу условия (М), также можно также показать равномерную ограниченность u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxt}.

III. Далее рассмотрим вопрос о разрешимости задачи Коши нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$u_{ttx}(t,x) + u_{tt}(t,x) + a(t,x)\,u_t(t,x) + b(t,x)\,u_x(t,x) + d(t,x)\,u(t,x) =$$
$$= f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x)) + \int_0^t K(t,s,u(s,x))ds, \qquad (10)$$

с начальными условиями (2), (3).

Условие (К). Пусть

1) $a(t,x),\ b(t,x),\ d(t,x) \in \bar{C}([0,T]\times R \to R), T>0$;

2) $f(t,x,u,v,\omega) \in \bar{C}\big([0,T]\times R\times R\times R\times R\big) \cap Lip\big(L|_u, L|_{u_t}, L|_{u_x}\big)$;

3) $K(t,s.u) \in \bar{C}\big((0\le s\le t)\times R\big) \cap Lip\big(L|_u\big), \phi(x), \psi(x) \in \bar{C}^{(1)}(R)$.

Решение начальной задачи (10), (2), (3) будем искать в виде

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x (t-s) e^{\alpha(t-s)+(x-v)} Q(s,v)dvds, \qquad (11)$$

где $\alpha > 0$ – параметр; $c(t,x) \in \bar{C}^{(2,1)}([0,T]\times R)$ – известная функция, такая, что $c(0,x) = \varphi(x)$; $c_t(0,x) = \psi(x)$, $Q(t,x)$ – новая неизвестная функция, подлежащая определению.

Для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставить (11) в уравнение (10). Тогда получаем интегральное уравнение вида

$$Q(t,x) = \Bigg\{ f\Bigg[t,x,c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x (t-s)e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} Q(s,v)dvds,\ c_t(t,x) +$$
$$+ \int_0^t \int_{-\infty}^x (1-\alpha(t-s))e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} Q(s,v)dvds,\ c_x(t,x) +$$
$$+ \int_0^t (t-s)e^{-\alpha(t-s)} Q(s,x)ds - \int_0^t \int_{-\infty}^x (t-s)e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} Q(s,v)dvds \Bigg] -$$
$$- \int_0^t \int_{-\infty}^x \Big[a(t,x)(1-\alpha(t-s))e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} - b(t,x)(t-s)e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} + d(t,x)(t-s)e^{-\alpha(t-s)-(x-v)} \Big] \times$$
$$\times Q(s,v)dv - \int_0^t (t-s)e^{-\alpha(t-s)} Q(s,x)ds - H\big(t,c(t,x)\big) \Bigg\} \equiv PQ, \qquad (12)$$

где $H(t,c(t,x))=c_{ttx}(t,x)+c_{tt}(t,x)+a(t,x)c_t(t,x)+b(t,x)c_x(t,x)+d(t,x)c(t,x)$.

К интегральному уравнению (12) будем применять принцип сжатых отображений. Правую часть (12) рассмотрим как оператор *PQ*, действующий на функцию $Q(t,x)$.

Рассмотрим область $Q=\left\{Q(t,x):Q(t,x)\in C\left([0,T_0]\times R\right)\cap\left\|Q(t,x)\right\|\le h\right\}$.

В силу предположения (К) и принципа сжатых отображений следует, что нелинейное интегральное уравнение Вольтерра (12) имеет единственное решение $Q(t,x)\in Q$. Подставив найденную функцию в (11), имеем решение начальной задачи (10), (2), (3).

Можно доказать, что все производные, входящие в уравнение (10), равномерно ограничены.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение (К). Тогда существует T_0 такое, что задача Коши (10), (2), (3) имеет решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R)$, которое представимо в виде (11). Кроме того, все производные, входящие в уравнение (10), равномерно ограничены.

Литература

1. *Байзаков А.Б.* Об асимптотической структуре решений нелинейных интегро-дифференциальных систем Вольтерра / А.Б. Байзаков // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Вып. 34. Бишкек: Илим, 2006. С. 24–30.
2. *Иманалиев М.* Разрешимость и структура решений задачи Коши одного класса интегро-дифференциальных уравнений четвертого порядка / М. Иманалиев, А.Б. Байзаков, К. Айтбаев // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: матер. 2-й межд. конф., посв. 20-летию образов. КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. Том 2. Бишкек, 2013. С. 114–118.
3. *Байзаков А.Б.* Методы преобразования решений в аналитической и асимптотической теории дифференциальных и интегральных уравнений: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук, спец. 01.01.02. / А.Б. Байзаков. Бишкек, 2011. 32 с.