УДК 515.122

КРИТЕРИИ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.Х. Жораев

Показано существование локально неоднородных подпространств для: недискретного отделимого топологического пространства; метрического пространства без изолированных точек; кинематического пространства, рассматриваемого как топологическое.

Ключевые слова: топологическое пространство; метрическое пространство; кинематическое пространство; локально неоднородное подпространство.

CRITERIA OF LOCAL NON-HOMOGENEITY OF TOPOLOGICAL SPACES

A.Kh. Zhoraev

Locally non-homogeneous subspaces exist for: non-discrete separated topological space; metrical space without isolated points; kinematical space considered as a topological one.

Keywords: topological space; metrical space; kinematical space; locally non-homogeneous subspace.

Введение. Различные определения понятия однородности для топологических пространств рассмотрены в [1]. Все они связаны с различными преобразованиями пространства X в целом, а именно, задана такая непрерывная группа G биективных преобразований g: $X \to X$, что для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такое $g_{12} \in G$, что $g_{12}(x_1) = x_2$. В этом случае любые два элемента (вместе с положением в пространстве в целом) неразличимы.

В связи с этим возникает вопрос о неоднородности топологических пространств. Известны следующие результаты.

По традиции через β обозначается компактификация Стоуна–Чеха. Введем еще обозначение $\beta^*X := \beta X \setminus X$.

Обозначим через N дискретное множество натуральных чисел. Тогда βN – пространство всех ультрафильтров в множестве N, β^*N – пространство всех свободных ультрафильтров в множестве N.

В [2] введено

Определение 1. Р-точка в топологическом пространстве – это такая точка, когда пересечение любого счетного семейства окрестностей этой точки является окрестностью этой точки.

Также введено

Определение 2. Слабо-Р-точка в топологическом пространстве – это такая точка $x \in X$, котороя не находится в замыкании любого счетного подмножества из $X \setminus \{x\}$.

Доказано, что в предположении континуум-гипотезы в β^*N существуют как Р-точки, так и не-Р-точки.

В [3] этот результат обобщен: доказано без дополнительных теоретико-множественных предположений, что для любого непсевдокомпактного пространства X пространство β^*X будет неоднородным.

В [2] доказано, что пространство β^*N содержит слабо-Р-точки.

Однако, как показывает обзор этих результатов, в частности в [4], все доказательства являются неконструктивными.

Поэтому в [5] предложены более общие понятия, для которых можно построить более конкретные пространства.

Определение 3. Если две точки топологического пространства имеют гомеоморфные окрестности, то они называются локально однородными.

Таким образом, топологическое пространство распадается на подпространства, каждое из которых содержит локально однородные между собой точки.

Соответственно, в [6] предложено

Определение 4. Если хотя бы две точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ не являются локально однородными, то пространство X в целом называется локально неоднородным.

Достаточные условия локальной неоднородности получены в [6] и [7] для кинематических пространств.

Определение 5 [8]. ***Кинематическим пространством*** называется множество G точек и множество K ***маршрутов.*** Каждый маршрут M – это пара: число $T_M > 0$ (***время*** маршрута) и функция $m_M : [0, T_M] \to G$ (***траектория*** маршрута). Выполняются следующие свойства.

(K1) Для любых $z_0 \neq z_1$ существует такое $M \in K$, что $m_M(0) = z_0$ и $m_M(T_M) = z_1$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {передвижение между любыми точками возможно, но сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M = \{T_M, mM(t)\} \in K$, то также $\{T_M, m_M(T_M - t)\} \in K$ {движение в обратном направлении}.

(K3) Если $M = \{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, TM)$, то также: $\{T^*, m^*(t) \equiv mM(t)\ (0 \leq t \leq T^*)\} \in K$ {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1) = m_2(0)$, то пара:

число $T^* = T_1 + T_2$ и функция $m^*(t) = m_1(t)\ (0 \leq t < T_1)$; $m^*(t) = m_2(t - T_1)\ (T_1 \leq t \leq T_1 + T_2)$ также принадлежит K {транзитивность}.

Для любой функции – траектории маршрута $m_M : [0, T_M] \to G$ множество ее значений естественно называть линией.

Теорема 1 [6]. Если 1) внутренность линейно связного множества $X \subset R^2$ не пуста; 2) в кинематическом пространстве X существуют такие точки A, B, C, D, и такая линия $[AC]$, что любая линия $[BD]$ имеет хотя бы одну общую точку с этой линией, то X не является открытым множеством в R^2. Таким образом, X является локально неоднородным кинематическим пространством.

В [7] этот результат обобщен на многомерный случай.

В данной статье этот вопрос рассматривается для общих топологических пространств.

1. Критерии неоднородности, связанные с локальными свойствами топологических пространств. Отметим, что каждое локальное свойство топологического пространства дает некоторый критерий локальной неоднородности.

Например, если множество окрестностей точки $x_1 \in X$ локально компактно (локально одномерно, локально связно и т. д.), а множество окрестностей точки $x_2 \in X$ – не такое, то топологическое пространство X локально неоднородно.

Введем более точные определения с количественными показателями.

Определение 6. Если любая окрестность V точки $x \in X$ имеет не менее n-компонент связности, то точка x называется (≥n)-локально связной; если для любой окрестности V точки x существует окрестность $V_1 \subset V$ этой точки, имеющая точно n- компонент связности, то точка x называется n-локально связной.

Аналогично, если рассматривать окрестности с исключенной точкой x: $V \backslash \{x\}$, то точка x называется исключительно (≥n)-локально связной или соответственно исключительно n-локально связной.

Определение 7. Если для любой окрестности V точки x существует окрестность $V_1 \subset V$ этой точки, гомеоморфная точке x с выходящими из нее n взаимно непересекающимися отрезками, то точка x называется n-линейно связной.

2. Условия существования локально неоднородных подпространств.

Теорема 2. Если топологическое пространство имеет локально n-линейно связную точку (x_1) и $n \neq 2$, то оно является локально неоднородным.

Доказательство. Возьмем на отрезке, концевой точкой которого является x_1, любую другую точку. Она является локально 2-линейно связной.

Отметим, что кольцо является локально однородным локально 2-линейно связным.

Приведем пример, когда переход к подмножеству сохраняет однородность.

Пример 1. Рассмотрим счетное дискретное пространство $N := \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ и конус на нем, с вершиной x_0. Введем в этом конусе кинематику с базисом: время перехода на любом подотрезке из отрезка $[x_k, x_0]$ равно длине этого подотрезка, $k = 1, 2, 3, \dots$.

При исключении любого множества из $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ такого, что остающееся множество – счетное, получающееся подпространство гомеоморфно исходному пространству.

Теорема 4. Всякое недискретное отделимое топологическое пространство имеет локально неоднородное подпространство.

Доказательство. По условию существует точка $x_1 \in X$, любая окрестность которой не пуста. Выберем любую другую точку $x_2 \in X$. Существуют такие окрестности V_1 точки x_1 и V_2 точки x_2, что $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Тогда $V_1 \cup \{x_2\} \subset X$ – локально неоднородное подпространство: в нем точки x_1 и x_2 имеют негомеоморфные системы окрестностей. Теорема доказана.

Для получения более содержательных результатов потребуем, чтобы подпространство не содержало изолированных точек. Имеют место

Теорема 5. Всякое метрическое пространство без изолированных точек имеет локально неоднородное подпространство без изолированных точек.

Теорема 6. Всякое кинематическое пространство, рассматриваемое как топологическое, имеет локально неоднородное подпространство без изолированных точек.

Литература

1. *Hart K.P.* Encyclopedia of General Topology / K.P. Hart, J.-I. Nagata, J.E. Vaughan. Elsevier Science Ltd., 2004 // h4 Homogeneous Spaces. P. 376–378.
2. *Rudin W.* Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications / W. Rudin // Duke Mathematical Journal. 1956. Vol. 23. P. 409–419.
3. *Frolik Z.* Nonhomogeneity of βP–P / Z. Frolik // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 1967. 8. P. 705–709.
4. *Kunen K.* Weak P-points in N* / K. Kunen // Colloquia Math. Soc. János Bolyai 1980, 23. P. 741–749.
5. *Борубаев А.А.* Распознаваемость размеченных топологических пространств / А.А. Борубаев, П.С. Панков // Вестник КНУ. 2007. Сер. 3. Вып. 4. С. 5–8.
6. *Жораев А.Х.* Условия существования неоднородных кинематических пространств / А.Х. Жораев // Вестник МУК. 2015. № 1(27). С. 45–47.
7. *Zhoraev A.* Conditions of existence of multidimensional locally non-homogeneous kinematical spaces / A. Zhoraev // Abstracts of the Issyk-Kul International Mathematical Forum / ed. by Acad. A. Borubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2015. P. 22.
8. *Борубаев А.А.* Компьютерное представление кинематических топологических пространств / А.А. Борубаев, П.С. Панков. Бишкек: КГНУ, 1999. 131 с.