УДК 517.968.72

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

***С. Искандаров, К.А. Асанова***

Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости на полуоси решений линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра. Предложен новый метод исследования.

*Ключевые слова:* интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра; асимптотическая устойчивость; нестандартный метод сведения к системе; лемма Люстерника–Соболева.

# ABOUT ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS THIRD ORDER

***S. Iskandarov, K.A. Asanova***

The article establishes the sufficient conditions for asymptotic stability of the solutions on the half-linear of third order Volterra integro-differential equation. A new method of research is offered.

*Keywords:* integro-differential equation of Volterra type; asymptotic stability; a non-standard method of reduction to system; Lemma Lyusternik–Sobolev.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными, и соотношения имеют место при $t \ge t_0$, $t \ge \tau \ge t_0$ ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; $J = [t_0, \infty)$; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ третьего порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех его решений и их первых и вторых производных.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)]d\tau = f(t),\ t \ge t_0. \quad (1)$$

Речь идет о решениях $x(t) \in C^3(J,R)$ ИДУ (1) с любыми начальными данными $x^{(k)}(t_0)\ (k = 0,1,2)$. Каждое такое решение существует и оно единственно.

Для решения этой задачи сначала аналогично работе [1] в ИДУ (1) делается замена:

$$x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \quad (2)$$

где $p$, $q$ – некоторые вспомогательные параметры, причем $p \ge 0$, $q > 0$, $0 < W(t)$ – некоторая вспомогательная весовая функция; $y(t)$ – новая неизвестная функция.

Тогда ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x''(t) + px'(t) + qx(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_2(t)y(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} [P_0(t,\tau)x(\tau) + P_1(t,\tau)x'(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)]d\tau = F(t),\ t \ge t_0, \end{cases}$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) - p + W'(t)(W(t))^{-1}, \quad b_1(t) \equiv (W(t))^{-1}[a_1(t) - pa_2(t) + p^2 - q],$$

$$b_0(t) \equiv (W(t))^{-1}[a_0(t) - qa_2(t) + pq], \quad P_0(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_0(t,\tau) - qQ_2(t,\tau)],$$

$$P_1(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}[Q_1(t,\tau) - pQ_2(t,\tau)],\ K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}Q_2(t,\tau)W(\tau), \quad F(t) \equiv (W(t))^{-1}f(t).$$

Теперь поступаем аналогично работе [2]. А именно, каждое уравнение системы (3) преобразуем отдельно. Для произвольно фиксированного решения $x(t)$, $y(t)$ первое уравнение системы (3), т. е. замену (2) возводим в квадрат, интегрируем в пределах от $t_0$ до $t$, в том числе по частям, и приходим к следующему тождеству:

$$V_1(t) \equiv \int_{t_0}^{t} [(x''(s))^2 + (p^2 - q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2]ds +$$

$$+ p(x'(t))^2 + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 \equiv V_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} (W(s))^2 (y(s))^2 ds. \tag{4}$$

Для преобразования второго уравнения системы (3), т. е. ИДУ первого порядка для $y(t)$, аналогично [3], введем следующие предположения и обозначения:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$,F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t) \tag{F}$$

$\psi_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые срезывающие функции,

$P_i(t) \equiv K_i(t,t)(\psi_i(t))^{-2}$, $T_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)(\psi_i(\tau))^{-1}$,

$E_i(t) \equiv F_i(t)(\psi_i(t))^{-1}$,

$P_i(t) = A_i(t) + B_i(t) \quad (i = 1..n)$, (P)

$c_i(t)$ $(i = 1...n)$ – некоторые функции, т. е. применяем метод частичного срезывания.

Заметим, что ядра $T_i(t, \tau)$ $(i = 1...n)$ называются частично срезанными [3].

Для произвольно фиксированного решения $(x(t),\ y(t))$ системы (3) ее второе уравнение умножаем на $y(t)$, производим интегрирование в пределах от $t_0$ до $t$, в том числе по частям, при этом вводим условия (*K*), (*F*), (*P*) функции $T_i(t, \tau)$, $E_i(t)$, $c_i(t)$ $(i = 1...n)$, используем леммы 1.4, 1.5 [4]. В итоге получаем следующее тождество:

$$V_2(t) \equiv (y(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)(y(s))^2 + \int_{t_0}^{t} y(s)\{b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} [P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)x'(\tau) +$$

$$+ K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau - F_0(s)\}ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 -$$

$$- 2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) - \int_{t_0}^{t} [B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_0) +$$

$$+ c_i'(s)]ds - 2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)d\tau ds] \equiv V_2(t_0), \tag{5}$$

где $Y_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \psi_i(\eta)y(\eta)d\eta \quad (i = 1..n)$.

Сложив тождества (4), (5), получим окончательное энергетическое тождество для любого произвольно фиксированного решения $(x(t),\ y(t))$ системы (3):

$$V(t) \equiv \int_{t_0}^{t} [(x''(s))^2 + (p^2 - q)(x'(s))^2 + q^2(x(s))^2]ds + p(x'(t))^2 + 2qx(t)x'(t) + pq(x(t))^2 +$$

$$+ (y(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_2(s)(y(s))^2 + \int_{t_0}^{t} y(s)\{b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s} [P_0(s,\tau)x(\tau) + P_1(s,\tau)x'(\tau) +$$

$$+ K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau - F_0(s)\}ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 ds + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 -$$

$$-2E_i(t)Y_i(t,t_0)+c_i(t)-\int_{t_0}^{t}[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2-2E_i'(s)Y_i(s,t_0)+c_i'(s)]ds-2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}T_{i\tau}'(s,\tau)Y_i(\tau,t_0)y(s)ds]\equiv$$

$$\equiv V(t_0)+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2ds, \qquad (6)$$

где $V(t)\equiv V_1(t)+V_2(t)$.

Переходя от тождества (6) к интегральному неравенству, аналогично теореме и следствию 1 работы [2], применением неравенства между средней арифметической и геометрической двух неотрицательных функций, неравенства Коши–Буняковского, метода интегральных неравенств Ю.А. Ведь, З. Пахырова [4] и леммы Люстерника–Соболева [5, 6] (если $x^{(k)}(t)\in L^2(J,R)$ $(k=0,1)$, то $x(t)\to 0$, $t\to\infty$), доказывается

ТЕОРЕМА. Пусть 1) $p>0, q>0, W(t)>0$, выполняются условия *(K), (F), (P)*; 2) $p^2-q>0$; 3) $b_2(t)\geq 0$; 4) $A_i(t)\geq 0$, существуют функции $A_i^*(t)\in L^1(J,R_+)$ такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t)$ $(i=1..n)$; 5) $B_i(t)\geq 0$, $B_i'(t)\leq 0$, существуют функции $c_i(t)$ такие, что $(E_i^{(k)}(t))^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t)$ $(i=1..n;\ k=0,1)$;

$$6)\ (W(t))^2+(b_k(t))^2+[\int_{t_0}^{t}(P_k(t,\tau))^2d\tau]^{\frac{1}{2}}+|F_0(t)|+\int_{t_0}^{t}|K_0(t,\tau)|d\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}|T_{i\tau}'(t,\tau)|(A_i(\tau))^{-\frac{1}{2}}d\tau\in L^1(J,R_+\setminus\{0\})\ \ (k=0,1;\ i=1..n).$$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (3) верны следующие утверждения:

$$x^{(k)}(t)\in L^2(J,R)\ \ (k=0,1,2), \qquad (7)$$

$$y(t)=O(1). \qquad (8)$$

Пусть, кроме того, 7) $W(t)\to 0$, $t\to\infty$. Тогда все решения ИДУ (1) и их первые и вторые производные стремятся к нулю при $t\to\infty$, иначе говоря, любое решение ИДУ третьего порядка (1) асимптотически устойчиво.

Заметим, что из утверждений (7) на основе леммы Люстерника–Соболева имеем, что $x^{(k)}(t)\to 0, t\to\infty$ $(k=0,1)$. В силу условия (7) и утверждения (8) из замены (2) получаем, что $x''(t)\to 0, t\to\infty$. Следовательно, для любого $x(t)$ ИДУ (1) $x^{(k)}(t)\to 0, t\to\infty$ $(k=0,1,2)$, что дает асимптотическую устойчивость решений ИДУ третьего порядка (1).

ПРИМЕР. Для ИДУ третьего порядка

$$x'''(t)+[3+D(t)]x''(t)+[2D(t)-3-\frac{e^{-t}\sin t}{t}]x'(t)+[D(t)-2-\frac{e^{-t}}{t+1}]x(t)+$$

$$+\int_{0}^{t}\{[Q_2(t,\tau)+\frac{e^{-t}}{(t^2+1)(\tau^2+1)}]x(\tau)+[Q_2(t,\tau)-\frac{2e^{-2t}}{t+\tau+1}]x'(\tau)+Q_2(t,\tau)x''(\tau)\}d\tau=$$

$$=-4e^{-t+t^2}\sin t+e^{-t-t^2}\cos t,\quad t\geq 0,$$

где $D(t)\equiv\exp[t(\cos t)^{\frac{1}{3}}]$, $Q_2(t,\tau)\equiv e^{-t+\tau+t^2+\tau^2}(e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}\sin t\sin\tau-\dfrac{e^{-t+\tau}}{(t+\tau+1)^7}$,

выполняются все условия теоремы при $p=2$, $q=1, W(t)\equiv e^{-t}$, здесь

$$t_0=0,\ b_2(t)\equiv D(t), b_1(t)\equiv-\frac{\sin t}{t}, b_0(t)\equiv-\frac{1}{t+1},$$

$$P_0(t,\tau)\equiv-\frac{1}{(t^2+1)(\tau^2+1)},$$

$$P_1(t,\tau)\equiv -\frac{2e^{-t}}{t+\tau+1},\ n=1,\psi_1(t)\equiv e^{t^2}\sin t,$$

$$K_1(t,\tau)\equiv e^{t^2+\tau^2}(e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-$$

$$-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}\sin t\sin\tau,\ K_0(t,\tau)\equiv -\frac{1}{(t+\tau+1)^7},$$

$$P_1(t)\equiv 3,\ A_1(t)\equiv 1,\ B_1(t)\equiv 2,$$

$$F(t)\equiv -4e^{t^2}\sin t+e^{-t^2}\cos t,\ E_1(t)\equiv -4, c_1(t)\equiv 4,$$

$$T_1(t,\tau)\equiv (e^{-5t^2+\sqrt[3]{\sin t}-\tau}-$$

$$-e^{-5t^2-t+\sqrt[3]{\sin t}}+9)^{\frac{1}{2}}e^{t^2}\sin t,$$

и, значит, любое решение и его первые и вторые производные этого ИДУ стремятся к нулю при $t\to\infty$ т. е. любое решение асимптотически устойчиво.

Отметим, что коэффициенты $a_k(t)$ ($k=0,1,2$) и срезанное ядро $T_1(t,\tau)$ недифференцируемы при $t\geq 0$.

Заметим, что выше поставленная задача ранее решена в [7] применением к первому уравнению системы (3) модифицированного метода преобразования уравнений [8, 9]. Анализ полученных результатов показывает, что условия, полученные в настоящей работе и в [7], не пересекаются. Тем самым расширяется класс ИДУ третьего порядка вида (1), для которого сформулированная выше задача решаема.

***Литература***


1. *Искандаров С.* О новом варианте метода нестандартного сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-диффренц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2007. Вып. 37. С. 24–29.
2. *Искандаров С.* О методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2014. Вып. 46. С. 41–48.
3. *Искандаров С.* Метод частичного срезывания и ограниченность решений неявного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка / С. Искандаров, Д.Н. Шабданов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2004. Вып. 33. С. 67–71.
4. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып.9. С. 68–103.
5. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44. С. 44–51.
7. *Искандаров С.* Нестандартный метод сведения к системе и асимптотическая устойчивость решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / С. Искандаров // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Бишкек: КНУ, 2011. Спец. вып. С. 66–70.
8. *Искандаров С.* Модификация метода В. Вольтерра для исследования асимптотического поведения решений линейного уравнения второго порядка / С. Искандаров // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1638–1639.
9. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.