УДК 517.955

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯХ

З.И. Сулейменова

Рассмотрена задача о нахождении вероятностного решения одного параболического уравнения специального вида. Получен закон распределения одного аддитивного функционала от винеровского процесса.

Ключевые слова: винеровский процесс; условное математическое ожидание; сигма-алгебра; стохастический интеграл; марковский процесс; преобразование Лапласа; плотность распределения.

ABOUT PROBABILITY REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION AND ITS APPLICATION

Z.I. Suleimenova

In this paper it is considered the problem of finding a probabilistic solution of one parabolical equations of a special form. As sheltered results obtained by applying the Laplace transform to the equation found for the joint characteristic function, after passing to the inverse transformation the distribution law of one additive functional of the Wiener process is found.

Keywords: wiener process; conditional expectation; sigma-algebra, stochastics integral; Markov process; Laplace transform; density function.

Рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+\left[\frac{1}{2}g^2(t,x)+f(t,x)\right]u(t,x), \tag{1}$$

где $t\geq 0$, $x\in R=(-\infty,+\infty)$, $u(0,x)=\Phi(x)$.

Нашей целью является нахождение вероятностного представления решения уравнения (1), а именно, доказательство того, что решение уравнения (1) можно записывать в виде

$$u(t,x)=M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s}\cdot e^{\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right], \tag{2}$$

где W_t – винеровский процесс; знак M_x означает взятие условного математического ожидания по всем, выходящим в начальной момент $t = 0$ из точки x, траекториям винеровского процесса: $M_x(\ldots) = M((\ldots)/W_0 = x)$, а стоящие в степени экспоненты интегралы – это соответственно стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу и обычный стохастический интеграл от случайной функции [1], [2], причем интегралы мы будем понимать как среднеквадратичные пределы соответствующих интегральных сумм.

В дальнейшем будем считать, что заданные функции $f(t, x)$, $g(t, x)$ и $\Phi(x)$ и являются непрерывными по t и x, и ограниченными вместе со своими производными по x до второго порядка включительно, функциями.

Заметим, что формулу (2) можно переписать по-другому, в виде безусловного математического ожидания:

$$u(t,x)=M\left[\Phi(W_t+x)e^{\int_0^t g(t-s,W_s+x)dW_s+\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right]. \tag{2'}$$

Формула $(2')$ вытекает из следующих соотношений:

$$M_x\left[\Phi(W_t)e^{\int_0^t g(t-s,W_s)dW_s+\int_0^t f(t-s,W_s)ds}\right]=$$

$$=M\left[\Phi((W_t-W_0)+W_0)\cdot e^{\int_0^t g(t-s,(W_s-W_0)+W_0)dW_s+\int_0^t f(t-s,(W_s-W_0)+W_0)ds}/W_0=x\right]=$$

$$=M\left[\Phi(\widetilde{W}_t+x)\cdot e^{\int_0^t g(t-s,\widetilde{W}_s+x)d\widetilde{W}_s+\int_0^t f(t-s,\widetilde{W}_s+x)ds}\right],$$

$$\widetilde{W}_t=W_t(0)=W_t-W_0.$$

Выше мы воспользовались тем, что процесс $\widetilde{W}_t=W_t-W_0$ также является (независящим от W_0) винеровским процессом (в $(2')$ мы этот процесс $\widetilde{W}_t$ обозначили опять через W_t).

Выполнение начального условия $u(0,x)=\lim\limits_{t\downarrow 0}u(t,x)=\Phi(x)$ вытекает непосредственно из формулы (2):

$$u(0,x)=M_x\Phi(W_0)=M(\Phi(W_0)/W_0=x)=M(\Phi(x)/W_0=x)=\Phi(x).$$

Существование непрерывных производных $u'_x(t,x),\ u''_{xx}(t,x)$ вытекает из возможности дифференцирования правой части $(2')$ по *x* дважды под знаком математического ожидания, при этом, обозначив

$$h(t,x)=\int_0^t g(t-s,\ W_s+x)dW_s+\int_0^t f(t-s,\ W_s+x)ds,\ \ \mathrm{v}(t,x)=e^{h(t,x)},$$

получим:

$$u(t,x)=M[\Phi(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)],$$

$$u'_x(t,x)=M\left[\Phi'_x(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)+\Phi(W_t+x)\mathrm{v}'_x(t,x)\right]=M\left[\Phi'_x(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)+\Phi(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)h'_x(t,x)\right],$$

$$\begin{aligned}u''_{xx}(t,x)=M[&\Phi''_{xx}(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)+2\Phi'_x(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)h'_x(t,x)+\\&+\Phi'(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)(h'_x(t,x))^2+\Phi(W_t+x)\mathrm{v}(t,x)h''_{xx}(t,x)]=\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=M\Bigg\{\mathrm{v}(t,x)\Bigg[\Bigg(&\Phi''_{xx}(W_t+x)+2\Phi'_x(W_t+x)\left(\int_0^t g'_x(t-s,W_s+x)dW_s+\int_0^t f'_x(t-s,W_s+x)ds\right)^2+\\&+\Phi(W_t+x)\left(\int_0^t g'_x(t-s,W_s+x)dW_s+\int_0^t f'_x(t-s,W_s+x)ds\right)^2+\\&+\Phi(W_t+x)\left(\int_0^t g''_{xx}(t-s,W_s+x)dW_s+\int_0^t f''_{xx}(t-s,W_s+x)ds\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Далее, обозначив через $W_{\Delta t}(s)$ процесс $W_{s+\Delta t}-W_{\Delta t}$: $W_s(\Delta t)=W_{s+\Delta t}-W_{\Delta t}$, можем записать

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[\Phi\left(W_s(\Delta t)+W_{\Delta t}+x\right)\mathrm{v}(t+\Delta t,x)\right],$$

где

$$\mathrm{v}(t+\Delta t,x)=\exp\left\{h(t+\Delta t,x)\right\}=\exp\left\{\int_0^{\Delta t} g\left(t+\Delta t-s,W_s\right)dW_s+\int_0^{\Delta t} f\left(t+\Delta t-s,W_s\right)ds+\right.$$
$$\left.+\int_0^t g\left(t-s,\ W_s(\Delta t)+W_{\Delta t}\right)dW_s(\Delta t)+\int_0^t f\left(t-s,W_s(\Delta t)+W_{\Delta t}\right)ds\right\}. \qquad (3)$$

Как известно из [1], [2], процесс $W_S(\Delta t)$ является независящим как от $W_{\Delta t}$, так и от сигма-алгебры $\mathcal{F}$ $V_s : 0 \le s \le \Delta t\}$ ($\mathcal{F}$ – наименьшая σ – алгебра, содержащая все события вида $\{W_S \in B,\ 0 \le s \le \Delta t,\ B \in \beta(R)\}$, $\beta(R)$ – борелевская σ – алгебра на прямой *R*) винеровским процессом.

Далее, используя измеримость стоящей в правой части (3) и содержащей интегралы от 0 до Δt экспоненты от $\mathcal{F}$, независимость содержащих аналогичных от 0 до t интегралов экспоненты от $\mathcal{F}$ и свойств условных математических ожиданий относительно сигма-алгебры, можем записать:

$$u(t+\Delta t,x)=M\Big[M\Big(\Phi\left(x+W_s(\Delta t)+W_{\Delta t}\right)\mathrm{v}(t+\Delta t,x)\,/\,\mathcal{F}$$
$$=M\exp\left\{\int_0^{\Delta t} g\left(t+\Delta t-s,\ x+W_s\right)dW_s+\int_0^{\Delta t} f\left(t+\Delta t-s,\ x+W_s\right)ds\right\}\cdot$$
$$M\Phi\left(x+W_s(\Delta t)+W_{\Delta t}\right)\exp\left\{\int_0^t g\left(t+\Delta t-s,\ W_s(\Delta t)\right)dW_s(\Delta t)+\int_0^t f\left(t+\Delta t-s,W_s(\Delta t)\right)ds\right\}.$$

Представление $(2')$ показывает, что последнее математическое ожидание равно $u(t,x+W_{\Delta t})$. Итак, получим, что

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[\exp\left\{\int_0^{\Delta t} g\left(t+\Delta t-s,\ x+W_s\right)dW_s+\int_0^{\Delta t} f\left(t+\Delta t-s,\ x+W_s\right)ds\right\}u\left(t,x+W_{\Delta t}\right)\right]. \qquad (4)$$

Теперь, имея в виду условия на функции *f*(*t*, *x*), *g*(*t*, *x*) и то, что при малых Δt $(\Delta t\to 0)$

$$W_{\Delta t}\sim\sqrt{\Delta t},\ W_{\Delta t}^2\sim\Delta t,\ \int_0^{\Delta t} g\left(t+\Delta t-s,\ x+W_S\right)dW_S\sim g(t,x)\,W_{\Delta t},$$

$$\int_0^t\int_0^{\Delta t} g\left(t+\Delta t-s_1,\ x+W_{s_1}\right)g\left(t+\Delta t-s_2,\ x+W_{s_2}\right)dW_{s_1}\,dW_{s_2}\sim g^2(t,x)\cdot W_{\Delta t}^2,$$

$$\int_0^{\Delta t} f\left(t+\Delta t-s,\ x+W_S\right)ds\sim f(t,x)\,\Delta t,$$

разложим стоящую в правой части (4) экспоненту с точностью до $o(\Delta t)$. Тогда можем записать:

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[\left(1+g(t,x)W_{\Delta t}+f(t,x)\Delta t+\frac{1}{2}g^2(t,x)W_{\Delta t}^2+o(\Delta t)\right)u\left(t,x+W_{\Delta t}\right)\right]. \qquad (4')$$

В свою очередь,

$$u\left(t,\ x+W_{\Delta t}\right)=u(t,x)+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot W_{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot W_{\Delta t}^2+o(\Delta t).$$

Подставляя это найденное выражение в правую часть $(4')$, и опять же оставляя только члены до порядка Δt, получим:

$$u(t+\Delta t,x)=M\left[u(t,x)+\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot W_{\Delta t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot W_{\Delta t}^2+g(t,x)u(t,x)\cdot W_{\Delta t}+\right.$$

$$\left.+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot W_{\Delta t}^2+f(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g^2(t,x)u(t,x)\cdot W_{\Delta t}^2+o(\Delta t)\right].$$

В последнем соотношении вычислим требуемые математические ожидания. Тогда, учитывая, что $MW_{\Delta t}=0,\ MW_{\Delta t}^2=\Delta t$, получим:

$$u(t+\Delta t,x)=u(t,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\cdot\Delta t+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\cdot\Delta t+$$

$$+f(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t+\frac{1}{2}g^2(t,x)u(t,x)\cdot\Delta t+o(\Delta t)\cdot$$

Откуда

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+g(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+\left[\frac{1}{2}g^2(t,x)+f(t,x)\right]u(t,x). \qquad (5)$$

Из этого соотношения (5) вытекает существование правой производной функции $u(t, x)$ по t. Поскольку она непрерывна, то существует и двусторонняя производная, совпадающая с правой. Подытоживая сказанное выше, получим справедливость теоремы.

Теорема. Пусть $f(t, x)$, $g(t, x)$ и $\Phi(x)$ являются непрерывными по x и t и ограниченными вместе со своими производными по x до второго порядка включительно функциями.

Тогда, определенная формулой (2) (или формулой (2′)), функция $u(t, x)$ в области $t > 0$, $x\in(-\infty,+\infty)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

Отметим, что в [3] аналогичная теорема доказана для случая, когда функции $f(t, x)$ и $g(t, x)$ не зависят от времени, при этом сначала теорема доказана в случае $g(x) = 0$, после окончательный результат получен с помощью замены исходной функции.

Доказанная теорема, как отмечено в [3], в случае $f = f(x)$, $g = g(x)$ позволяет находить совместную характеристическую функцию функционалов: $I_1(t) = W_1$, $I_2(t)=\int_0^t g(W_s)dW_s$, $I_3(t)=\int_0^t f(W_s)ds$.

В самом деле, пусть $\varphi(t,x,z_1,z_2,z_3)$ является (условной) совместной характеристической функцией функционалов $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ $(z_1,z_2,z_3\in R^1)$:

$$\varphi(t,x,z_1,z_2,z_3)=M_x\left(e^{iz_1I_1(t)+iz_2I_2(t)+iz_3I_3(t)}\right). \qquad (6)$$

Если теперь в теореме вместо $\Phi(x)$ возьмем $\overline{\Phi}(x)=e^{iz_1x}$, вместо $g(x)$ функции $\bar{g}(x)=iz_2g(x)$, вместо $f(x)$ функции $\bar{f}(x)=iz_3f(x)$, то согласно нашей теореме условная характеристическая функция $\varphi(t,x,z)$ (см. (6)), где $z=(z_1,z_2,z_3)$, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial\varphi(t,x,z)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(t,x,z)}{\partial x^2}+iz_2g(x)\frac{\partial\varphi(t,x,z)}{\partial x}+\left(iz_3f(x)-\frac{z_2^2}{2}g^2(x)\right)\varphi(t,x,z), \qquad (7)$$

$$\varphi(0,x,z)=e^{ixz_1}.$$

Ясно, что нужной нам (безусловной) совместной характеристической функцией величин $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ является функция $\varphi(t,0,z)=\varphi(t,0,z_1,z_2,z_3)$. С помощью применения преобразования Лапласа по t, решение уравнения (7) можно сводить к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого умножим обе части уравнения (7) на $e^{-\lambda t}$ $(\lambda>0)$, после проинтегрируем по t от нуля до бесконечности.

Если обозначим через $\widetilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ преобразование Лапласа $\varphi(t, x, z)$ по *t*, то для этой функции получим уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2} + iz_2 g(x)\frac{\partial\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x} + \left(iz_3 f(x) - \frac{z_2^2}{2} g^2(x) - \lambda\right)\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = -e^{ixz_1}. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) должно быть ограничено на всей числовой оси и поскольку $|\varphi(t,x,z)| \le 1$, должно быть $|\widetilde{\varphi}(t,x,z)| \le \frac{1}{\lambda}$.

В этом случае уравнение (8) выполняется на всех точках непрерывности $f(x)$ и $g(x)$, а в точках разрыва этих функций является непрерывная производная $\frac{\partial\widetilde{\varphi}(t,x,z)}{\partial x}$.

Замечание. С помощью перехода к пределу можно убедиться в том, что уравнение (8) остается справедливым и для кусочно-постоянных и ограниченных на каждом конечном интервале функции $f(x)$ и $g(x)$.

В качестве примера применения теоремы найдем распределения функционала $I(t) = \int_0^t signW_s dW_s$.

У нас $g(x) = signx$, $f(x) = 0$, поэтому уравнение (1) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + signx\cdot\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}u(t,x),$$

$$u(0,x) = 1.$$

Далее $\varphi(t,x,z) = M_x\left(e^{iz\int_0^t signW_s dW_s}\right)$, $\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t,x,z)dt$ и уравнение (8) записывается в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2} + izsignx\cdot\frac{\partial\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda\right)\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = -1. \tag{9}$$

Уравнение (9) запишем в отдельности для случаев $x > 0$ и $x < 0$.

В случае $x > 0$ уравнение (9) превращается в уравнение с постоянными (т. е. независящими от *x*) коэффициентами:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2} + iz\cdot\frac{\partial\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda\right)\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = -1, \tag{10}$$

а в случае $x < 0$ в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x^2} - iz\cdot\frac{\partial\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda\right)\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = -1. \tag{11}$$

Корнями характеристического уравнения однородной части уравнения (10) являются $s_1 = iz + \sqrt{2\lambda}$, $s_2 = -iz - \sqrt{2\lambda}$, а частным решением (10) является функция $\widetilde{\varphi}_1(\lambda,x,z) = \frac{1}{\frac{z^2}{2} + \lambda} = \frac{2}{2\lambda + z^2}$. Аналогичным образом поступаем с уравнением (11).

В итоге получим, что общими решениями уравнений (10) и (11) являются соответственно функции

$$\widetilde{\varphi}(\lambda,x,z) = C_1 e^{\left(-iz+\sqrt{2\lambda}\right)x} + C_2 e^{\left(-iz-\sqrt{2\lambda}\right)x} + \frac{2}{2\lambda + z^2},\ x > 0;$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = C_3 e^{\left(iz+\sqrt{2\lambda}\right)x} + C_4 e^{\left(iz-\sqrt{2\lambda}\right)x} + \frac{2}{2\lambda + z^2},\ x < 0,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные.

Функция $\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ является непрерывной по x, поэтому подставляя значение $x = 0$ в последние два уравнения, получим соотношение

$$C_1 + C_2 = C_3 + C_4.$$

Так как $\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ к тому же ограниченная функция, получим, что $C_1 = 0$, $C_4 = 0$, значит $C_2 = C_3$.

Таким образом,

$$\tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = C_2 e^{\left(-iz-\sqrt{2\lambda}\right)x} + \frac{2}{2\lambda + z^2},\ x > 0;$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = C_2 e^{\left(iz+\sqrt{2\lambda}\right)x} + \frac{2}{2\lambda + z^2},\ x < 0.$$

Далее, из непрерывности $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x}$ по x, получим, что $C_2 = 0$.

Итак, решением уравнения (9) является функция

$$\tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = \tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \frac{2}{2\lambda + z^2} = \frac{1}{\lambda\left(1 + \frac{z^2}{2\lambda}\right)}.$$

Теперь нашей целью является представление $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$ как преобразования Лапласа от некоторой функции, т. е. представление $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$ в виде

$$\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t, z)dt.$$

Для этой цели разложим в ряд в области $\left|\frac{z^2}{2\lambda}\right| < 1$ функцию $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$:

$$\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \frac{1}{\lambda\left(1 + \frac{z^2}{2\lambda}\right)} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{2^n\lambda^n} = \int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{2^n}\cdot\frac{e^{-\lambda tn}\cdot t^n}{n!}dt = \int_0^\infty e^{-\lambda tn}\phi(\lambda, 0, t)dt.$$

Выше мы использовали известное соотношение

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda tn}\cdot t^n}{n!}dt = \frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Вспомнив, что функция Бесселя нулевого порядка определяется соотношением

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

получим, что

$$\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\left(tz^2\right)^n}{2^n\cdot n!}\right)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt.$$

Откуда

$$\varphi(0, t, z) = J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right) = \int_0^\infty e^{izx}\cdot f_{I(t)}(x)dx,$$

где $f_{I(t)}(x)$ плотность распределения $I(t)$.

С помощью обратного преобразования, с учетом четности $J_0(x)$, получим:

$$f_{I(t)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos zx\cdot J_0\left(\sqrt{2tz^2}\right)dt.$$

Далее, используя обратную формулу косинус-преобразования Фурье ([4, с. 214],) для плотности распределения получим:

$$f_{I(t)}(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\left(\left(\sqrt{2t}\right)^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\pi\sqrt{2t-x^2}}, & 0<x<\sqrt{2t},\\ 0, & x\notin\left(0,\ \sqrt{2t}\right).\end{cases}$$

Откуда находим функцию распределения:

$$F_{I(t)}(x)=\int_{-\infty}^{x}f_{I(t)}(x)dx=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2t}}, & 0<x<\sqrt{2t},\\ 1, & x>\sqrt{2t}.\end{cases}$$

Литература

1. *Гихман И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. М.: Наука, 1977.
2. *Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов / А.Н. Ширяев, А.В. Булинский. М.: Наука, 2005.
3. *Скороход А.В.* Предельные теоремы для случайных блужданий / А.В. Скороход, Н.П. Слободенюк. Киев: Наукова думка, 1970.
4. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. М.: Наука, 1978.