

УДК 332.834.13:517.929.2

## ИПОТЕКА И ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова*

Рассматривается процесс развития техники ипотечных расчетов.

*Ключевые слова:* ипотека; недвижимость; ипотечный кредит; погашение кредита.

---

## MORTGAGE AND LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

*S.K. Kydraliev, A.B. Urdaletova*

Developing methods of mortgage's calculations is the goal of this article.

*Keywords:* mortgage; habitation; mortgage loan; amortization of loan.

В последнее время много говорится об ипотеке. Так, согласно сообщению газеты «Вечерний Бишкек» от 4 июля 2014 г., на совещании в правительстве бывший премьер-министр Джоомарт Оторбаев заявил о необходимости реформирования сферы ипотечного кредитования. По его словам, одной из главных проблем ипотечного кредитования является нехватка длинных финансовых ресурсов ввиду слабости отечественных институциональных инвесторов. «На сегодня сроки по ипотечным кредитам составляют 5 лет, максимум 10, но такие сроки трудно назвать ипотечными, кредиты должны выдаваться на 10–25 лет. Процентные ставки по ипотечным кредитам в развитых странах мира всегда ниже ставок по бизнес-кредитам. Но у нас в стране картина иная: ставки по ипотеке завышены и превышают ставки по бизнес-кредитам. Так, ставки составляют 16–24 %, при этом средневзвешенная ставка в национальной валюте – 19,87 %, в иностранной – 17,66 %. Это говорит о нежелании большинства банков развивать такой продукт, как ипотека. Устанавливаются высокие ставки, по которым клиенты не могут брать ипотеку».

К сожалению, это далеко не первое и, наоборот, не последнее заявление такого рода. Но, как говорится, «воз и ныне там». В итоге, можно говорить о практическом отсутствии ипотеки в Кыргызстане. Это очень печальный факт, так как это одна из наиболее успешно работающих финансовых схем обеспечения населения жильем. Возможно, это направление получит развитие с вступлением Кыргызстана в Евроазиатский Экономический Союз, члены которого, в частности Россия, гораздо более успешны в деле развития

ипотеки. Следует отметить, что руководители Российской Федерации держат ипотеку под постоянным контролем, причем даже в очень непростых условиях, в которых сейчас находится экономика России. Так, 13 марта 2015 г., на сайте правительства РФ за подписью премьер-министра России Дмитрия Медведева опубликовано постановление о введении с марта 2015 г. льготной ипотеки. Как отмечается в документе, «в связи с ухудшением макроэкономической ситуации в стране сократилась доступность ипотечного кредитования. Ряд участников рынка приостановили прием заявок на займы, а некоторые установили ставки в размере 20 процентов годовых, тогда как в 2014 г. средняя ставка по ипотечным кредитам составляла 12,5 процента». Для того чтобы преодолеть эти негативные явления, согласно документу, процентная ставка ипотечного кредитования не может превышать 13 процентов годовых.

Возможно ли быстрое развитие ипотеки в нашей стране? По всей видимости, в рамках классической ипотеки, с фиксированным размером выплат, в ближайшее время – вряд ли. Но (о чем многие не знают) существуют и другие ипотечные схемы, которые могут позволить значительно снизить ставки по ипотеке и увеличить сроки, на которые выдаются кредиты. Об одной из таких схем будет сказано далее.

Ипотека – это форма кредитования покупок недвижимости, при которой покупатель в момент покупки платит только часть денег (обычно 20–40 %), а остальные деньги вносит банк. Затем, в течение длительного промежутка времени, делая выплаты в заранее оговоренные периоды времени, покупатель погашает задолженность банку.

В экономически развитых странах это одна из наиболее популярных форм кредитования населения, так как она весьма удобна для обеих сторон: покупатель становится собственником недвижимости, избежав многих лет ожидания, необходимых для накопления всей суммы, а банк выдает кредит, имея надежное залоговое обеспечение – недвижимость, которая куплена с помощью этого кредита. Проиллюстрируем данный пример.

**Задача 1.** Жанат покупает дом стоимостью \$60 000 на условиях ипотеки. Она отдает \$20 000, а остальные деньги вносит банк. По договоренности с банком, Жанат должна расплатиться, ежеквартально выплачивая одну и ту же сумму в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 24 %. Чему равна величина выплаты?

Для определения искомой суммы воспользуемся линейными разностными уравнениями, представив процесс решения задачи сведениями об этих уравнениях. Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + b \quad (1)$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка.

Здесь числа  $a$  и  $b$  – коэффициенты уравнения,  $x_k$  – переменная, описывающая состояние системы в момент  $k$ . Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент. В связи с этим уравнения вида (1) часто называют **рекуррентными**.

Решение уравнения (1) связывает начальное значение  $x_0$  со значением в произвольном периоде  $x_n$ :

$$x_n = a^n x_0 + b \frac{1 - a^n}{1 - a}. \quad (2)$$

Воспользуемся формулой (2) для решения задачи 1.

Обозначим через  $x_n$  сумму долга банку к концу квартала с номером  $n$ . Нетрудно увидеть, что \$40000, которые нужно вернуть банку, есть величина  $x_0$ , которая должна быть амортизирована за 40 периодов, при этом каждому периоду соответствуют  $24\% \cdot (1/4) = 6\%$  интереса, а  $x_{40} = 0$ .

Поэтому из уравнения  $x_n = (1 + 0,06)x_{n-1} - V$  и формулы (2) легко получить, что в конце каждого квартала нужно выплачивать банку деньги в размере  $V = 411428,72 / 154,762 = \$2658,46$ .

Приведенный пример иллюстрирует ипотеку с фиксированной ставкой.

Несмотря на очевидные достоинства, к сожалению, в нашей стране ипотека не развита. Хотя несколько банков предлагают воспользоваться ипотечными кредитами, ставка по этим кредитам столь

высока, а сроки, на которые выдаются кредиты, столь коротки, что остается завидовать даже российским потребителям, не говоря о тех, кто имеет возможность получать такие кредиты в экономически развитых странах.

В ответ на упреки в чрезмерно высоких ставках по кредитам банки ссылаются на высокие риски, связанные с неустойчивой экономической ситуацией в стране. Можно соглашаться с утверждениями о высоком риске, но дело в том, что давно придуманы способы снижения этих рисков. Так, значительная часть жилищных ипотек в США – это *ипотеки с плавающей ставкой* (adjustable-rate mortgages, ARM). Такие ипотеки позволяют кредитору изменять процентную ставку в течение срока ссуды – в заранее оговоренные моменты и при соблюдении строгих ограничений. По мнению американских экономистов, использование ипотек с плавающей ставкой привело к оживлению жилищного строительства в США в 90-х гг. прошлого века.

Проблема, возникающая при общепринятой практике предоставления ссуды под закладную с фиксированной номинальной выплатой за период, заключается в том, что многие покупатели – обычно это молодые люди или пары, только начинающие жизнь, – как правило, не могут делать высокие реальные выплаты, которые предусматриваются в самом начале выплат. Это принуждает многих из них копить деньги для более высокой первоначальной выплаты или расстаться с мечтой о покупке собственного жилья.

Для того чтобы сделать процесс погашения ипотечного кредита более приемлемым, во многих странах мира все большее распространение получает финансовый инструмент, называемый *ипотекой с поправкой на уровень цен* (price-level-adjusted mortgages, PLAM). В отличие от ипотеки с фиксированной ставкой, для которой номинальная выплата за период фиксирована, ипотека PLAM предусматривает рост номинальной выплаты.

Причем, если темпы роста выплат будут соответствовать инфляции, то это означает постоянство *реальной* выплаты на протяжении всего срока ипотечного кредита. Преимущества ипотеки с поправкой на уровень цен наиболее очевидны в условиях высокого уровня инфляции.

Описывая ипотеку ARM и ипотеку PLAM, мы следуем книге Р.Л. Миллера и Д.Д. Ван-Хуза «Современные деньги и банковское дело» [1]. Техника расчета схемы погашения принадлежит нам.

В рамках настоящей статьи не представляется возможным продемонстрировать технику расчетов выплат для ипотек ARM и PLAM. Заинтересованные лица могут обратиться к работе [2] или непосредственно к авторам работы по адресу syrgakkyd@mail.ru.

При использовании ипотеки PLAM величины выплат образуют геометрическую прогрессию, и в результате может иметь место парадоксальная ситуация: в какие-то моменты времени номинальная величина долга по ипотечному кредиту может превышать величину долга в начальный момент времени.

Один из способов, позволяющих избежать подобной ситуации, – воспользоваться вариацией метода. Мы предлагаем вариант, при котором величины выплат будут образовывать арифметическую прогрессию, первый член которой будет равен величине интереса за первый период.

**Задача 2.** Чолпон покупает квартиру стоимостью \$70000, сделав первый взнос \$20000. Далее, по договоренности с банком, она должна расплатиться, делая ежемесячные выплаты в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 24 %. При этом первая выплата равна величине интереса за первый месяц, далее выплаты будут возрастать на одно и то же число  $d$  каждый месяц. Требуется рассчитать величины ежемесячных платежей.

Величина первой выплаты равна  $50000 \cdot 0,02 = \$1000$ .

Для того чтобы найти величину  $d$ , нужно решить уравнение

$$x_n = (1 + 0,02)x_{n-1} - (1000 + d(n-1))$$

при начальных условиях  $x_0 = 50000$ ;  $x_{120} = 0$ .

Следовательно, необходимо рассмотреть еще один класс линейных разностных уравнений – уравнения вида

$$x_n = cx_{n-1} + (f + d(n-1)). \quad (3)$$

Решение этого уравнения следующее:

$$x_n = c^n \cdot x_0 + f \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1} + d \cdot \frac{c^n - nc + n - 1}{(c - 1)^2}. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет получить решение задачи 2:

$$0 = x_{120} = (1,02)^{120} \cdot 50000 + (-1000) \frac{(1,02)^{120} - 1}{0,02} + (-d) \frac{(1,02)^{120} - 120 \cdot 1,02 + 120 - 1}{(0,02)^2} = 538258,2 - 488258,2 - d18412,9.$$

Отсюда  $d = 2,7155$ .

Следует обратить внимание на интересный факт. Полученная при вычислении величины  $x_{120}$  разность  $538258,2 - 488258,3$  равна значению  $x_0$ . Случайно ли это? Докажем, что нет.

Итак, рассматривается уравнение

$$x_n = (1 + k)x_{n-1} - (kx_0 + d(n-1)).$$

Согласно (4), его решение

$$x_n = (1 + k)^n \cdot x_0 - kx_0 \cdot \frac{(1 + k)^n - 1}{(1 + k) - 1} - d \times$$

$$\times \frac{(1 + k)^n - n(1 + k) + n - 1}{((1 + k) - 1)^2}$$

Приведем подобные члены и получим

$$x_n = x_0 - d \cdot \frac{(1 + k)^n - n(1 + k) + n - 1}{((1 + k) - 1)^2}. \quad (5)$$

Из формулы (5) вытекает, что если первая выплата по ипотечному кредиту совпадает с процентами за первый период, то для погашения ипотеки сумму платежа в каждом последующем периоде

нужно увеличивать на  $d = \frac{x_0 k^2}{(1 + k)^n - (nk + 1)}$ .

В заключение, для справки, средний уровень ставки ипотечного кредита в США и Китае составляет порядка 5 %, в Европе – 4 %, где самый высокий уровень в Польше (6 %). И самая низкая ставка в Японии: 1–2 %. При этом ипотечный кредит в Японии можно взять на любой срок, хоть на 100 лет. Предполагается, что в этом случае выплаты забершат наследники<sup>1</sup>.

#### Литература

1. Миллер Р.Л. Современные деньги и банковское дело / Р.Л. Миллер, Д.Д. Ван-Хуз. М.: ИНФРА-М, 2000.
2. Кыдыралиев С.К. Ипотека, разностные уравнения, аналогии и метод чайника / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Г.А. Керимкулова // Высшее образование Кыргызской Республики. Бишкек, 2009. № 4/6. С. 15–19.

<sup>1</sup> По данным российского телеканала «Вести 24» от 3.02.2010.