УДК 517.962, 517.956.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С МГНОВЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ И ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.Дж. Сатыбаев, А.Ж. Кокозова

Рассмотрена обратная задача телеграфного уравнения с указанными данными. Методами выпрямления характеристик и выделения особенностей она приведена к обратной задаче с данными на характеристиках. Последняя задача решена конечно-разностным методом. Построено конечно-разностное решение восстановления электропроводимости в обратной задаче телеграфного уравнения, показана сходимость этого решения к точному решению.

Ключевые слова: телеграфное уравнение; конечно-разностное решение; электропроводимость; обратная задача; мгновенный источник; плоская граница.

ӨТӨ ТЕЗ БУЛАГЫ ЖАНА ТЕГИЗ ЧЕГИ МЕНЕН ТЕЛЕГРАФТЫК ТЕҢДЕМЕНИН ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНДЕ ЭЛЕКТР ӨТКӨРГҮЧТҮКТҮ КАЛЫБЫНА КЕЛТИРҮҮ

Бул макалада көрсөтүлгөн маалыматтар менен телеграфтык теңдеменин тескери маселеси каралган. Бул маселе мүнөздөмөнү түздөө жана өзгөчөлүктөрүн бөлүп көрсөтүү методдорун колдонуу менен, мүнөздөмөлөрдөгү маалыматтары бар тескери маселеге келтирилген. Акыркы маселе ченем-айырмалык методду колдонуу менен чыгарылган. Телеграфтык теңдеменин тескери маселесинде электр өткөргүчтүктү калыбына келтирүүнүн ченем-айырмалык чыгарылышы түзүлгөн, бул чыгарылыштын так чыгарылыш менен бирдейлиги көрсөтүлгөн.

Түйүндүү сөздөр: Телеграфтык теңдеме, ченем-айырмалык чыгарылыш, электр өткөргүчтүк, тескери маселе, өтө тез булак, тегиз чек.

RECOVERY OF ELECTRIC CONDUCTIVITY IN THE REVERSE PROBLEM OF A TELEGRAPHIC EQUATION WITH AN INSTANT SOURCE AND A FLAT BORDER

A.Dzh. Satybaev, A.Zh. Kokozova

The article considers the inverse problem of the telegraph equation with the indicated data. It is the methods of rectifying the characteristics and isolating the singularities, is reduced to the inverse problem with data on the characteristics. The latter problem is solved by a finite-difference method. A finite-difference solution of the reconstruction of the electric conductivity in the inverse problem of the telegraph equation is constructed and the convergence of this solution to the exact solution is shown.

Keywords: telegraph equation; the finite difference solution; electrical conductivity; the inverse problem; instantaneous source; flat boundary.

Актуальность задачи. В настоящее время термин “обратные задачи” быстро проникает в различные области современной науки и техники, которые возникли в середине XX века. Обратные задачи возникают в задачах физики и техники, сейсмологии и геофизики, медицины и биоинформатики, астрономии и др.

Если в прямых задачах отыскивается решение задачи при известных параметрах, то в обратных задачах определяются физические параметры, коэффициенты уравнений совместно с решением задачи при задании дополнительной информации о решении прямой задачи на поверхности.

В телеграфное уравнение входят ряд физических параметров таких, как скорость распространения волн, электрическая и магнитная проницаемость, электропроводимость среды и нахождение этих параметров представляет практический интерес.

Цель данной работы – определение физического параметра электропроводимости среды при известных остальных параметрах уравнения и при дополнительной информации о решении задач и нахождение электропроводимости среды численным конечно-разностным методом.

Единственность обратных задач телеграфного уравнения рассмотрены в работах [1, 2]. Прямые задачи можно решить используя работу [3].

Многие задачи электродинамики описываются полной системой уравнений Максвелла. Применяя некоторые преобразования к полной системе уравнений Максвелла можно получить телеграфное уравнение вида [4]:

$$\frac{\partial^2 H(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\bar{c}^2(z)}{\varepsilon(z)\mu(z)} \cdot \frac{\partial^2 H(z,t)}{\partial z^2} - \frac{4\pi\sigma(z)}{\varepsilon(z)} \frac{\partial H(z,t)}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $H(z,t)$ – напряженность магнитного поля; $\bar{c}(z)$ – скорость распространения волн; $\varepsilon(z), \mu(z)$ – электрическая и магнитная проницаемость; $\sigma(z)$ – электропроводимость среды.

Постановка обратной задачи. Восстановить $\sigma(z)$ – электропроводимость из уравнения (1) при заданных значениях $\bar{A}(z), \mu(z), \varepsilon(z),$ при заданных начальных и граничных условиях вида:

$$H(z,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad H_z(z,t)\big|_{z=0} = -\frac{1}{2} h_0 \delta(t) + r_0 \theta(t), \qquad (2)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\theta(t)-$ тета-функция Хевисайда; $h_0, r_0 -$ положительные постоянные при заданной дополнительной информации вида:

$$H(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (3)$$

Пусть относительно параметров уравнений и неизвестной электрической проницаемости выполнено условие

$$\bar{c}(z), \mu(z), \sigma(z) \varepsilon(z) \in \Lambda_0 \ , \qquad (4)$$

где $\Lambda_0 = \left\{ \mu(z) \in C^6(R_+), \mu(+0) = 0,\ 0 < M_1 \le \mu(z) \le M_2, \|\mu\|_{C^2} \le M_3 \right\};$

T, M_1, M_2, M_3 – положительные постоянные.

Приведение к обратной задаче с данными на характеристиках

Для того чтобы привести задачи (1)–(3) к задаче с прямыми характеристиками, введем новую переменную x: $x = \int\limits_0^z \frac{\sqrt{\varepsilon(\lambda)\mu(\lambda)}}{\bar{c}^2(\lambda)} d\lambda.$

Требуем, чтобы замена была вырожденной в выполнении условия

$$x'_z > 0, \quad \lim_{z\to\infty} x(z) = 0.$$

Введем новые функции:

$$\begin{gathered} c(x(z)) = \bar{c}(z), a(x(z)) = \varepsilon(z), b(x(z)) = \mu(z), \\ d(x(z)) = \sigma(z), u(x(z),t) = H(z,t). \end{gathered} \qquad (5)$$

Тогда, применяя все входящие функции в уравнения четным образом по x на полупространстве $R_- = \{x \in R,\ x < 0\}$, получим следующую обратную задачу:

$$\left. \begin{aligned} & u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \frac{\left(\sqrt{a(x)b(x)}\right)'_x \cdot c(x) - \sqrt{a(x)b(x)} \cdot c'_x(x)}{\sqrt{a(x)b(x)} \cdot c(x)} u_x - \frac{4\pi d(x)}{a(x)} u_t, \\ & u(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad u_x(x,t)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{c(0)\cdot h_0}{\sqrt{a(0)2(0)}} \delta(t) + \frac{c(0)}{\sqrt{a(0)b(0)}} \cdot r_0 \theta(t), \end{aligned} \right\} \qquad (6)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = f(t), \qquad t \in [0,T], \qquad (7)$$

где искомой функцией является функция d(x).

В силу условия (4) и принципа конечной зависимости области решения гиперболического уравнения от области определения его коэффициентов и от области данных, можно ограничиться рассмотрением задачи (6)–(7) в области:

$$\Delta(T)=\left\{(x,t)\in R\times R_+,\quad x\in(0,T/2),\quad |x|<t<T-|x|\right\}.$$

Предоставим решения прямой задачи (6)–(7) в сумме сингулярных и регулярных частей:

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)+S(x)\theta(t-|x|)+R(x)\theta_1(t-|x|),$$

где $\tilde{u}(x,t)$ – гладкая непрерывная функция, $\theta_1(t)=t\theta(t)$.

Произведем некоторые выкладки:

$$u_t(x,t)=\tilde{u}_t(x,t)+S(x)\delta(t-|x|)+R(x)\theta(t-|x|),$$

$$u_{tt}(x,t)=\tilde{u}_{tt}(x,t)+S(x)\delta_t'(t-|x|)+R(x)\delta(t-|x|),$$

$$u_x(x,t)=\tilde{u}_x(x,t)+S_x'(x)\theta(t-|x|)-S(x)\delta(t-|x|)+R_x'(x)\theta_1(t-|x|)-R(x)\theta(t-|x|),$$

$$u_{xx}(x,t)=\tilde{u}_{xx}(x,t)+S_{xx}''(x)\theta(t-|x|)-2S_x'(x)\delta(t-|x|)+S(x)\delta'(t-|x|)+$$

$$+R_{xx}''(x)\theta_1(t-|x|)-2R_x'(x)\theta(t-|x|)+R(x)\delta(t-|x|).$$

Подставляя последние выкладки в (6) и (7), получим:

$$\left.\begin{aligned}&u_{tt}(x,t)=u_{xx}(x,t)-2\frac{S'(x)}{S(x)}u_x(x,t)+\frac{4\pi d(x)}{a(x)}u_t(x,t),\quad (x,t)\in\Delta(T),\\&u(x,t)\big|_{t=|x|}=S(x),\ x\in[0,T/2],\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=f(t),\ \ t\in[0,T].\tag{9}$$

Здесь получим задачи для R(x) и S(x):

$$2R_x'(x)+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{a(x)b(x)}\right)_x'-c(x)-\sqrt{a(x)b(x)}c'(x)}{\sqrt{a(x)b(x)}\cdot c(x)}\right]R(x)=$$

$$=S_{xx}''(x)+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\sqrt{a(x)b(x)}\right)_x'-c(x)-\sqrt{a(x)b(x)}c'(x)}{\sqrt{a(x)b(x)}\cdot c(x)}\right]\cdot S_x'(x),$$

$$R(0)=\frac{c(0)\cdot r_0}{\sqrt{a(0)b(0)}};$$

$$2\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{a(x)2(x)}}{c(x)}\right)_x'}{\left(\dfrac{\sqrt{a(x)2(x)}}{c(x)}\right)}+\frac{4\pi d(x)}{a(x)},\quad S(0)=\frac{c(0)\cdot h_0}{\sqrt{a(0)2(0)}}.$$

Для получения замкнутой системы сделаем следующие выкладки:

$$2\frac{S'(x)}{S(x)}=\left[\frac{\left(\sqrt{a(x)2(x)}\right)_x'}{\left(\sqrt{a(x)2(x)}\right)}-\frac{c'(x)}{c(x)}\right]+\frac{4\pi d(x)}{a(x)}.\tag{10}$$

Из (10) получим:

$$d(x) = \left(2\frac{S'(x)}{S(x)} - \left[\frac{(\sqrt{a(x)в(x)})'_x}{(\sqrt{a(x)в(x)})} - \frac{c'(x)}{c(x)} \right] \right) * a(x)/(4*\pi). \qquad (11)$$

Введем обозначения:

$$D(x) = 2\frac{S'(x)}{S(x)}, \qquad G(x) = \frac{1}{S(x)}. \qquad (12)$$

Тогда они соответственно будут удовлетворять следующим интегральным уравнениям:

$$S(x) = -\frac{A(0)\cdot h_0}{\sqrt{a(0)2(0)}} + \frac{1}{2}\int_0^x D(\lambda)S(\lambda)d\lambda, \qquad x \in [0, T/2], \qquad (13)$$

$$G(x) = -\frac{\sqrt{a(0)2(0)}}{c(0)r_0} - \frac{1}{2}\int_0^x D(\lambda)G(\lambda)d(\lambda), \qquad x \in [0, T/2]\,.` \qquad (14)$$

Таким образом, уравнения (8)–(9), (11)–(14) составляют замкнутую систему.

Конечно-разностное решение. Решение обратной задачи (8), (9), (11), (14) будем искать конечно-разностным методом.

Введем сеточную область:

$$\Delta_h(T) = \left\{ x_i = ih, t_k = kh, \quad h = T/2N, \quad i = \overline{0,N}, \quad ih < kh < T - ih \right\},$$

где h – сеточный шаг по переменным x, t.

Используя сеточные обозначения [4], напишем сеточный аналог обратной задачи (8), (9), (13), (14):

$$\left.\begin{aligned}
&8_{t\bar{t}} = u_{x\bar{x}} - D_i u_{\underset{\bar{x}}{0}} + \frac{4\pi d_i}{a_i} u_t, \quad (ih, kh) \in \Delta_h(T),\\
&u_i^i = S_i, \ i = \overline{0,N},\\
&G_i = \frac{1}{f_0} - \frac{h}{2}\sum_{l=1}^{i-1} D_l \cdot G_l, \quad i = \overline{1,N},\\
&D_i = 2S_{\underset{\bar{x}}{0}} G_i, \quad i = \overline{2,N}\\
&d_i = (D_i - (\sqrt{a_i b_i})_{\bar{x}} / \sqrt{a_i b_i} + (c_i)_{\bar{x}} / c_i) * a_i / (4*\pi),
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$u_0^k = f^k, \quad k = \overline{0,2N}. \qquad (16)$$

Опишем алгоритм решения обратной задачи (15), (16). Полагаем,

$$u_0^k = f^k, \quad k = \overline{0,2N}. \qquad (17)$$

Из четности всех функций следует:

$$u_2^k = (f^{k+2} + f^{k-2})/2, \qquad k = \overline{2,2N-2}\ . \qquad (18)$$

Тогда можно определить последовательно

$$S_0 = u_0^0,\ S_{-2} = u_2^2, \quad G_0 = \frac{1}{f^0}, D_0 = 2G_i \cdot S_{\underset{\bar{x}}{0}}\Big|_{i=0} = \frac{2}{f^0}\cdot\frac{S_0 - S_2}{2h} = \frac{2}{f^0}\frac{u_0^0 - u_2^2}{2h}.$$

Определим следующие значения:

$$u_1^k = \left(f^{k+1} + f^{k-1}\right)/2 - h^2 D_0 \left(\frac{u_0^k - u_2^k}{2h}\right) + \frac{4\pi d_0}{a_0} h^2 \left(\frac{u_0^k - u_0^{k-1}}{h}\right),$$

$$S_1 = u_1^1,\ S_{-1} = u_1^1,\ G_1 = \frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} D_0 G_0,\ D_1 = 2G_1 \frac{S_1 - S_{-1}}{2h},$$

$$G_2 = \frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} D_0 G_0 - \frac{h}{2} D_1 G_1,\ D_2 = 2G_2 \frac{S_2 - S_0}{2h}\ . \tag{19}$$

Допустим, построен i-й слой. Покажем, как определяется следующий слой: определим u_{i+1}^k по формуле Даламбера:

$$u_{i+1}^k = \left(f^{k+1} + f^{k-1}\right) \Big/ \ 2 - h^2 \sum_{l=1}^{i} D_l \left(\frac{u_l^k - u_{l-2}^k}{2h}\right) + 4\pi h^2 \cdot \sum_{l=1}^{i} \frac{d_l}{a_l}\ \frac{u_l^k - u_l^{k-1}}{h},$$

а затем

$$\begin{gathered} S_{i+1} = u_{i+1}^{i+1}, G_{i+1} = \frac{1}{f^0} - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^{i} D_l G_l, \qquad D_{i+1} = 2G_{i+1} \frac{S_{i+1} - S_{i-1}}{2h}, \\ d_{i+1} = (D_{i+1} - (\sqrt{a_{i+1} b_{i+1}})_{\bar{x}} / \sqrt{a_{i+1} b_{i+1}} + (c_{i+1})_{\bar{x}} / c_{i+1}) * a_{i+1} / (4 * \pi). \end{gathered} \tag{20}$$

Показывается, что d_i есть точное решение обратной задачи сходится к $\overline{d}_i$ – точному решению, доказываем следующую теорему.

Теорема. Пусть для $f(t) \in C^4([0,T])$ решение обратной задачи (8), (9), (13), (14) существует и удовлетворяет условию (4) и пусть решение $u\left(x,t\right) \in C^4\left(\overline{\Delta\left(T\right)}\right)$.

Тогда d_i – приближенное решение, построенное конечно-разностным методом, обратной задачи (15), (16) сходится к $\overline{d}_i$ – точному решению (8), (9), (13), (14) в классе *C* со скоростью в порядке *O(h),* при некотором “малом” *T*, и имеет место следующая оценка:

$$\left|d_i - \overline{d}_i\right| < P \cdot h \|u\|_{C^2}\ , \tag{21}$$

где *P* зависит от норм известных коэффициентов; *h* – шаг сетки по $x, t,$ $\|u\|_{C^2}$ – норма решения прямой задачи.

Таким образом, если мы определим S_i, то можем определить функцию d_i по формуле (11), а $d_i = \sigma_i$ – электропроводимость среды.

Численные методы решения подобных задач рассмотрены в работах [5–7].

Литература

1. *Глушкова Е.С.* О единственности некоторых обратных задач для телеграфного уравнения / Е.С. Глушкова // Математические проблемы геофизики. 1975. Вып. 6. Новосибирск: ВЦ Сиб. Отд. АН СССР. С. 130–144.
2. *Романов В.Г.* О единственности определения диэлектрической и магнитной проницаемости ванизатропной одномерно-неоднородной среды // Диф. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. С. 375–382.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. М.: Наука, 1983. 407 с.
4. *Сатыбаев А.Дж.* Обратная задача телеграфного уравнения / А. Дж. Сатыбаев // Проблемы непрерывного образования в условиях обновления общества: матер. межд. научн.-практ. конф. Часть III. Ош, 1999. С. 194–198, 201–204.
5. *Сатыбаев А.Дж.* Численное определение емкости мембраны в задаче распространения потенциала действий по нервному волокну / А.Дж. Сатыбаев, А.Ж. Кокозова // International medical scientific journal. 2017. № 5 (17). С.14–22.
6. *Сатыбаев А.Дж.* Численный алгоритм и реализация прямой задачи для системы уравнений Максвелла / А.Дж. Сатыбаев, А.Т. Маматкасымова // Вестник КРСУ. 2015. Том 15. № 5. С. 83–87.
7. *Сатыбаев А.Дж.* Конечно-разностный алгоритм определения магнитной проницаемости телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источником / А.Дж. Сатыбаев, Т.Ч. Култаев, А.Ж. Кокозова // Матер. XII межд. школы-семинара “Проблемы оптимизации сложных систем”. Новосибирск, 12–16 декабря 2016. С. 508–514.