УДК 517.97

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова

Исследованы вопросы однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения распределенного оптимального управления, которое появляется при решении задачи оптимизации с квадратичным критерием качества. Найдено достаточное условие существования решения распределенного оптимального управления, являющееся решением нелинейного интегрального уравнения.

Ключевые слова: распределенное оптимальное управление; квадратичный функционал; нелинейное интегральное уравнение; достаточное условие.

ON THE SOLVABILITY OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS IN THE PROBLEM OF CONTROL DISTRIBUTION OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Kerimbekov, R.J. Nametkulova

It was investigated the problems of the unique solvability of a nonlinear integral equation of distributed optimal control, which appears in the solution of the optimization problem with quadratic performance. It was found sufficient condition for existence of a solution distributed optimal control, which is the solution of a nonlinear integral equation.

Key words: Distributed optimal control; quadratic functional; nonlinear integral equation; a sufficient condition.

В работе [1] была рассмотрена задача оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J[u(t,x)]=\int_0^1[v(T,x)-\xi(x)]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1u^2(t,x)dxdt,\quad \beta>0 \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)], \qquad (2)$$

$$v(0,x)=\psi(x), \qquad (3)$$

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0, \qquad (4)$$

где функция $v(t,x)$ описывает состояние управляемого теплового процесса; функция внешнего источника $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ 0<t\le T\}$ нелинейно зависит от функции управления $u(t,x)\in H(Q)$, и по функциональной переменной $u(t,x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f[t,u(t,x)]}{\partial u}\ne 0,\quad \forall t\in[0,T]; \qquad (5)$$

$\psi(x)\in H(0,1)$ – функция начального состояния; $\xi(x)\in H(0,1)$ – функция конечного состояния; λ – параметр, постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

В работе [1] показано, что для функционала (1) имеет место соотношение

$$\Delta J[u]=-\int_0^T\int_0^1\{\omega(t,x)(f[t,x,u+\Delta u]-$$

$$-f[t,x,u])-\beta(2u\Delta u+\Delta u^2)\}dxdt+$$

$$+\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx=-\int_0^T\int_0^1\Delta\Pi(t,x,\omega(t,x),v(t,x),$$

$$u(t,x))dxdt+\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx, \qquad (6)$$

где

$$\Pi(t,x,\omega(t,x),\nu(t,x),u(t,x)) =$$
$$= \omega(t,x)f[t,x,u(t,x)] - \beta u^2(t,x)\,, \qquad (7)$$

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]$$
$$\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T \tilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(x)\,; \qquad (8)$$

$\nu_n(t)$, $\tilde{R}_n(s,t,\lambda)$ – известные функции (см. [1]).

Согласно (6)–(7) управление, на котором функционал (1) достигает минимального значения, должно удовлетворять следующим соотношениям:

$$2\beta u(t,x)f_u^{-1}\left[t,u(t,x)\right] = \omega(t,x)\,, \qquad (9)$$

$$f_u\left[t,u(t,x)\right]\left(\frac{u(t,x)}{f_u\left[t,u(t,x)\right]}\right)_u > 0\,, \qquad (10)$$

которые называются условиями оптимальности.

С учетом (8), (9) перепишем его в виде

$$\beta\left(\frac{u(t,x)}{f_u\left[t,u(t,x)\right]}\right) +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\int_0^T G_n(\tau)\int_0^1 f\left[\tau,y,u(\tau,y)\right]z_n(y)dyd\tau\, z_n(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n z_n(x), \qquad (11)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right),$$

$$G_n(\tau) = e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} + \lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds,$$

$$G_n(t) = e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds,$$

а $R_n(T,s,\lambda)$ и $R_n(s,t,\lambda)$ – известные функции (см. [1]).

Теперь исследуем вопросы разрешимости уравнения (11). Относительно дополнительного условия (10) будем предполагать, что функция $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию (10).

Сначала исследуем вопросы существования единственного решения уравнения (11). С этой целью, согласно методике работы [2], положим:

$$\beta f_u^{-1}\left[t,x,u(t,x)\right] = p(t,x)\,. \qquad (12)$$

Согласно условию (8), из (11) функция $u(t,x)$ определяется однозначно, т. е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая, что

$$u(t,x) = \varphi\left[t,x,p(t,x),\beta\right]. \qquad (13)$$

В силу (12) и (13) уравнение (11) перепишем в виде операторного уравнения

$$p(t,x) = G\left[p(t,x)\right], \qquad (14)$$

где

$$G\left[p(t,x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau)\right.$$
$$\left.\int_0^1 f\left[\tau,y,\varphi(\tau,y,p(\tau,y),\beta)\right]z_n(y)dyd\tau\right]z_n(x)\,. \qquad (15)$$

Далее, непосредственными вычислениями докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если для любого $u(t,x)\in H(Q)$ функция $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ является элементом пространства $H(Q)$, то $p(t,x)$, определяемая формулой (12), является элементом пространства $H(Q)$.

Лемма 2. Оператор $G\left[p(t,x)\right]$ переводит пространство $H(Q)$ в себя.

Лемма 3. Пусть функции $f\left[t,x,u(t,x)\right]$ и $\varphi\left[t,x,p(t,x),\beta\right]$ удовлетворяют следующим условиям Липщица:

$$\left\|\varphi\left[t,x,p(t,x),\beta\right] - \varphi\left[t,x,\bar{p}(t,x),\beta\right]\right\|_H \le$$
$$\le \varphi_0(\beta)\left\|p(t,x)-\bar{p}(t,x)\right\|_H\,,\ \ \varphi_0(\beta)>0. \qquad (17)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = \left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]$$
$$\sqrt{\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}}f_0\varphi_0(\beta) < 1 \qquad (18)$$

оператор $G[p]$ является сжимающим.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), (10), (16)–(18). Тогда операторное уравнение (14) в пространстве $H(Q)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Гильбертово пространство $H(Q)$ является полным метрическим пространством. Оператор $G[p]$ переводит пространство $H(Q)$ в себя и является сжимающим. Поэтому, согласно принципу сжимающих отображений [3] операторное уравнение (14) в пространстве $H(Q)$ имеет единственное решение.

Это решение находится методом последовательных приближений, т.е. k-е приближение решения определяется из условия

$$p_k(t,x) = G\left[p_{k-1}(t,x)\right],\quad k=1,2,3,\dots,$$

где $p_0(t,x)$ – произвольный элемент пространства $H(0,T)$.

Точное решение $\tilde{p}(t,x)$ операторного уравнения (14) находится по формуле

$$\tilde{p}(t,x) = \lim_{k\to\infty} p_k(t,x),$$

и имеет место оценка

$$\left\|\tilde{p}(t,x) - p_k(t,x)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t,x)\right] - p_0(t,x)\right\|_H. \quad (19)$$

Далее найденное $\tilde{p}(t,x)$ подставляем в (13), и получим функцию

$$u^0(t,x) = \varphi\left[t, x, \tilde{p}(t,x), \beta\right],$$

которая является решением нелинейного интегрального уравнения (11).

Литература

1. *Керимбеков А.* Оптимальное распределенное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями и приближенные решения краевых задач / А. Керимбеков, Р. Наметкулова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 2014. Вып. 46. С. 14–20.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т матем. НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.