

УДК 517.962.2

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА**

А.Т. Маматкасымова, А.Дж. Сатыбаев

Рассмотрено построение решения одномерной прямой задачи для уравнения Максвелла с данными на характеристиках. Разработан конечно-разностный алгоритм решения задачи и проведена численная реализация ее решения для различных тестовых модельных функций, получены графики.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла; прямая задача; конечно-разностный метод; численный алгоритм; численная реализация; графики решений.

**NUMERICAL ALGORITHM AND IMPLEMENTATION SOLVE
OF THE DIRECT PROBLEM FOR MAXWELL'S EQUATIONS**

A.T. Mamatkasymova, A.Dzh. Satybaev

The modification of on-dimensional direct problem for Maxwell's equations with the data on the characterization is conserved in this article. Also finite-difference algorithm for solving the problem is developed and got graphic solutions by authors.

Key words: Maxwell's system of equalizations, direct problem, finite – difference method, numerical algorithm, numerical implementation, graphics of solutions.

Постановка задачи. Полная система уравнений Максвелла в случае точечного источника и в простейшем виде анизотропии при некоторых преобразованиях, приводит к решению следующей прямой задачи [1]:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + K \frac{\partial}{\partial z} + M \right] W + R\delta(z - z_0, t), \quad z \neq 0 \quad (1)$$

$$W|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} (W_{(1)} + W_{(2)}) \right]_{z=0} = 0, \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} (W_{(1)} - W_{(2)}) \right]_{z=0} = 0, \quad (3)$$

Здесь K, M – некоторые матрицы; \bar{R} – вектор (см. [1], с. 189).

Эта прямая задача в работе [1] рассмотрена в области:

$$\Pi(T, 0) = \bigcup_{j=1}^3 \Pi_j(T, 0), \text{ где}$$

$$\Pi_1(T, 0) = \{(z, t) : z \in (-T, 0), |z| < t < T - |t + T|\},$$

$$\Pi_2(T, 0) = \{(z, t) : z \in (-T, 0), -z < t < 2t + z\},$$

$$\Pi_3(T, 0) = \{(z, t) : z(0, t), z < t < 2T - z\}.$$

При решении прямой задачи (1)–(3) кажется, что алгоритм очень прост и решается легко. Однако в случае перехода из одной области в другую вызывает много трудностей.

В данной статье задача (1)–(3) приведена к прямой задаче дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа с данными на характеристиках в одной единственной области. Создан алгоритм решения, проведены численные расчеты, решения реализованы на различных модельных данных.

При некоторых преобразованиях системы (1) (при выделении особенностей по методике В.Г. Романова [2], а также после выпрямления характеристики уравнения), задача (1)–(3) приводится к следующей прямой задаче (см. [3]):

$$V''_t(z, t) = V''_{zz}(z, t) + \left[\frac{\bar{\sigma}(z)}{\bar{\epsilon}(z)} - \frac{1}{S(z)} \cdot \left(\frac{p(t)}{\bar{\epsilon}(z)} - 2S'_z(z) \right) \right] \cdot V'_z(z, t) - \frac{\bar{\sigma}(t)}{\bar{\epsilon}(z)} V'_t(z, t) - \frac{p'_t(t)}{\bar{\epsilon}(z)}, \quad (z, t) \in \Delta(T), \quad (4)$$

$$V(z, t)|_{|z|=t} = S(z), \quad z \in [0, T], \quad (5)$$

$$S(z) = \frac{p(0)}{\bar{\varepsilon}(0)} + \frac{1}{2} \int_0^z \frac{p(\xi)}{\bar{\varepsilon}(\xi)} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^z \left[\frac{\mu'_\xi(\xi)}{\mu(\xi)} - (\bar{\varepsilon}(\xi) \cdot \mu(\xi))'_\xi - \frac{\bar{\sigma}(\xi)}{\varepsilon(\xi)} \right] S(\xi) d\xi, \quad z \in (0, T), \quad (6)$$

где $p(t)$ – распределенный ток в кабеле; $\bar{\varepsilon}(z), \bar{\mu}(z)$ – диэлектрическая и магнитная проницаемость; $\bar{\sigma}(z)$ – электропроводимость; $p(t), p'(t)$ – заданные функции; $S(z)$ – функция, определенная формулой (6), $\Delta(T) = \{(z, t) : z \in (-T, T), |z| < t < T\}$.

Для численного решения алгоритма введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{(z_i, t_\kappa) : h = \frac{T}{N}, z_i = ih, i = \overline{-2N, 2N}; \tau_\kappa = \kappa h, \kappa = \overline{1, 2N}\},$$

и составим разностный аналог задачи (4)–(6) [3]:

$$V_i^{k+1} = V_{i+1}^k - V_i^k + V_i^{k-1} + \left[\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{S_i} \left(\frac{p^k}{\varepsilon_i} - 2 \cdot \frac{S_i - S_{i-1}}{h} \right) \right] * \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2h} - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot \frac{V_i^k - V_i^{k-1}}{h} - \frac{p^{k+1} + p^k}{h\varepsilon_i}, \quad (z_i, t_\kappa) \in \Delta_h(T), \quad (7)$$

$$V_i^i = S_i, \quad z_i \in [0, T], \quad (8)$$

$$S_i = \frac{p_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{p_l}{\varepsilon_l} \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{i-1} \left[\frac{\mu_l - \mu_{l-1}}{\mu_l \cdot h} - \frac{\varepsilon_l \cdot \mu_l - \varepsilon_{l-1} \mu_{l-1}}{h} - \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \right] S_l \cdot h, i = \overline{1, N} \quad (9)$$

Таблица 1 – Модельно-заданные функции $p(t), \mu(z), \varepsilon(z), \sigma(z)$

№ рисунка	Функция				Шаг по τ
	$p(t)$	$\sigma(z)$	$\mu(z)$	$\varepsilon(z)$	
2	$2.1 - \cos^2(1,57 \cdot t)$	1	1	1	0,02
3	$2.1 - \cos^2(6,28 \cdot t)$	$1.6 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$1.1 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$2.6 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	0,02
4	$2.1 - \cos^2(6,28 \cdot t)$	$2.4 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$2.3 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$2.6 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	0,02
5	Ступенчатая функция	$2.7 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$2.5 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	$2.3 - \cos^2(6,28 \cdot 2t)$	0,02
6	Мгновенная функция	1	1	1	0,005
7	$2.1 - \cos^4(3,14 \cdot t)$	1	1	1	0,01

Сходимость решения конечно-разностной задачи (7)–(9) к решению дифференциальной задачи (4)–(6) можно доказать по методике [3].

Одномерная прямая задача уравнений Максвелла (7)–(9) вычислена в области, показанной рисунке 1, при $T = 4, N = 200, h = \frac{T}{N} = 0.02, \tau = \frac{T}{2N} = 0.01$.

Алгоритм

- вначале вычисляется формула (9) и определяются значения $S_i, i = \overline{0, N}$, а затем эти значения присваиваются к $V_i^i, i = \overline{0, N}$, т. е. определяются значения функции V на характеристиках.
- по значениям V_i^i определяются значения V_i^{i+1} по формуле Тейлора, затем по формуле (7) определяются значения $V_i^{\kappa+1}, \kappa = \overline{1, N-1}$ внутри области $\Delta_h(T)$ (см. рисунок 1).

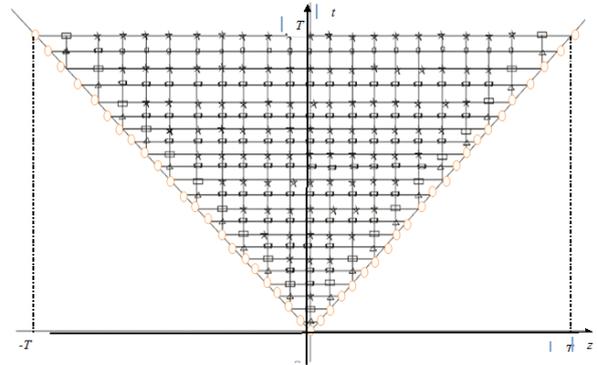


Рисунок 1 – Область вычисления алгоритма

В качестве функции $\bar{\sigma}(z), \bar{\varepsilon}(z)$ были взяты различные тестовые функции, при решении прямой задачи были определены $f^\kappa = V_0^\kappa$ дополнительная информация обратной задачи.

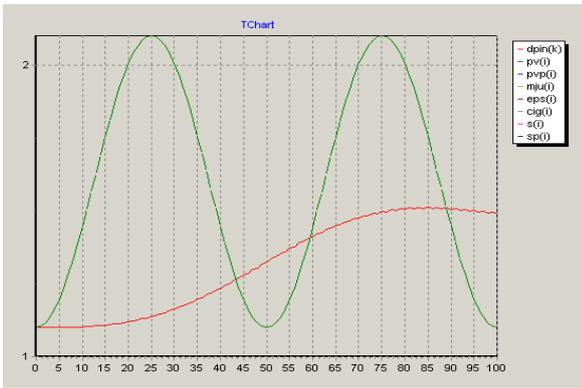


Рисунок 2 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=2.1-\cos^2(1.57*\tau)$; при $\sigma(z):=1.0$; $\mu(z):=1.0$; $\varepsilon(z):=1.0$; $\sigma(z), \mu(z)=0.02$

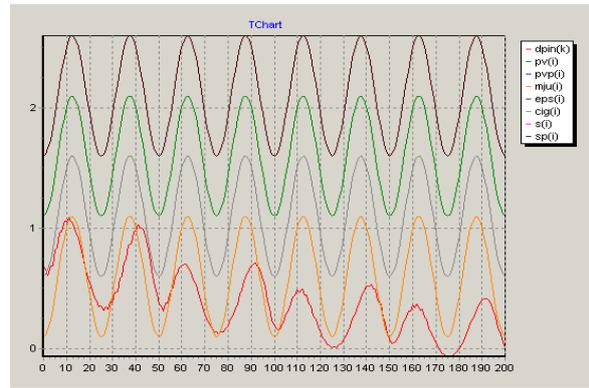


Рисунок 3 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=2.1-\cos^2(6.28*\tau)$; $\sigma(z):=1.6-\cos^2(6.28*\tau)$; $\mu(z):=1.1-\cos^2(6.28*\tau)$; $\varepsilon(z):=2.6-\cos^2(6.28*\tau)$; $\tau=0.02$

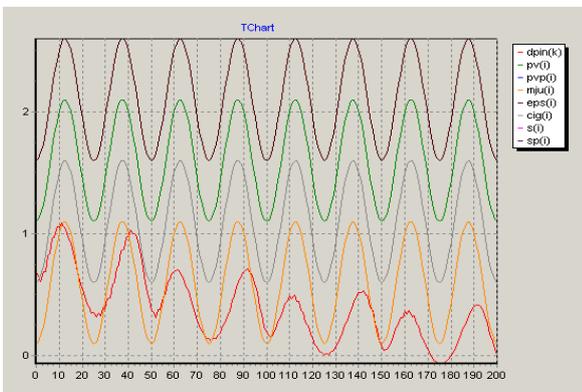


Рисунок 4 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=2.1-\cos^2(6.28*\tau)$; $\sigma(z):=1.6-\cos^2(6.28*\tau)$; $\mu(z):=1.1-\cos^2(6.28*\tau)$; $\varepsilon(z):=2.6-\cos^2(6.28*\tau)$; $\tau=0.02$

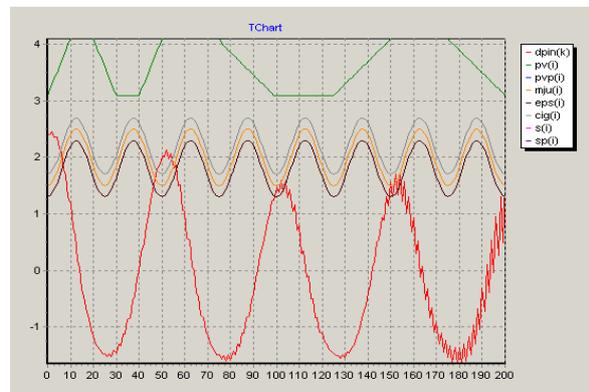


Рисунок 5 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=$ Ступенчатая функция; $\sigma(z):=2.7-\cos^2(6.28*\tau)$; $\mu(z):=2.5-\cos^2(6.28*\tau)$; $\varepsilon(z):=2.3-\cos^2(6.28*\tau)$; $\tau=0.02$

Вычислены значения функций $V_z(z, t)$, $V_r(z, t)$ в разностных отношениях, которые будут использованы при решении обратной задачи Максвелла. По данному алгоритму вычислена прямая задача, которая реализована на языке Delphi.

Во всех графиках выведено решение прямой задачи $V(z, t)$ при $z = 0$ и $p(t)$.

Одномерная прямая задача для уравнения Максвелла (4)–(6) численно реализована для функций $p(t), \mu(z), \varepsilon(z), \sigma(z)$ в следующих видах (см. таблицу 1). Глубина вычисления $Z = 4$.

На всех представленных рисунках выведены графики функций: $dopin(t) = V(0, t)$ – дополнительная информация для обратной задачи и графики; $\sigma(t)$ – электропроводимость; $\mu(z)$ – магнитная проницаемость; $\varepsilon(z)$ – диэлектрическая проницаемость; $p(t)$ – распределенный ток в кабеле.

Численные расчеты показали, что уменьшив сеточные шаги в два, четыре раза (рисунки 2–4), можно увеличить точность решения задачи для уравнения Максвелла 1, 4 ÷ 1, 8 раза.

При решении одномерной прямой задачи уравнения Максвелла проанализированы следующие особенности созданного авторами алгоритма.

А. Численная устойчивость алгоритма. В ходе исследования выявлена численная устойчивость численного алгоритма путем проведения следующих действий:

а) последовательно уменьшали (увеличивали) шаги сетки (рисунки 2–3), в результате получили относительные погрешности решения прямой задачи в нескольких точках. Здесь относительные погрешности почти одинаковы, что и подтверждает устойчивость алгоритма;

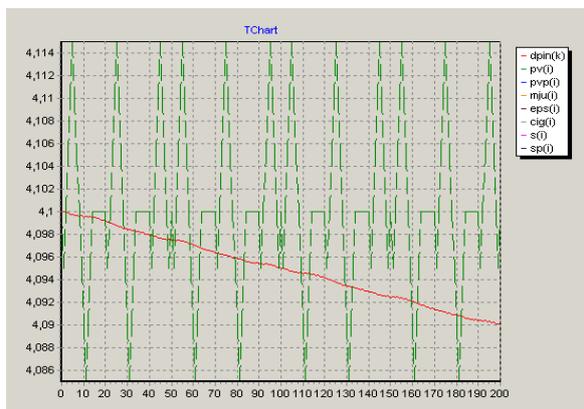


Рисунок 6 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=$ Мгновенная функция; при $\sigma(z):=1.0$; $\mu(z):=1.0$; $\varepsilon(z):=1.0$; $\tau=0.005$

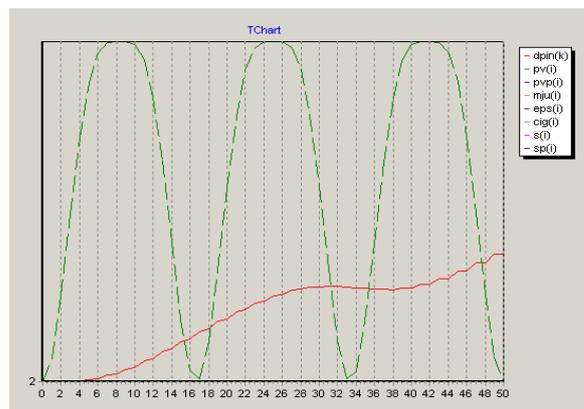


Рисунок 7 – Графики функции $dopin[\tau]$ – дополнительная информация для обратной задачи; $p(t):=2.1-\cos^4(3.14*\tau)$; при $\sigma(z):=1.0$; $\mu(z):=1.0$; $\varepsilon(z):=1.0$; $\tau=0.01$

б) измельчив шаги (рисунки 2, 6) в каждой точке сетки, получили значения решения прямой задачи $V(0, t)$, и выяснили разность значений, т. е. абсолютные погрешности. Они также одинаковы, что подтверждается устойчивостью созданного алгоритма.

Б. Глубина вычисления по z. В прямой задаче уравнения Максвелла $z \in [0, T]$ (см. (4)–(6)). Шаги сетки по t и z $\tau = T/N$ и $h = 2T/N$.

Вычисление производилось при $Z=4$, анализ показал, что вычисления хорошо проводятся до $Z = 2$ условной единицы (например, 2 км, 20 км...). Глубину вычисления можно увеличивать, измельчая шаги сетки N (соблюдая устойчивость алгоритма), но в этом случае увеличивается и машинное время вычисления.

В. Варианты функций $p(t)$, $\sigma(z)$, $\mu(z)$ и $\varepsilon(z)$. В качестве функции $p(t)$ – распределенный ток в кабеле – задавали различные функции: косинусообразные (рисунки 2, 4, 7), ступенчатые (рисунок 5), а также в виде мгновенной (рисунок 6). В большинстве случаев вычисление проходило нормально.

Затем последовательно задавали и косинусообразные функции для функций $\sigma(z)$, $\mu(z)$, $\varepsilon(z)$. В ходе вычислений выяснилось, что решение прямой задачи Максвелла существенно зависит от значений функций $\mu(z)$ и $\varepsilon(z)$ – магнитной и диэлектрической проницаемости, особенно от функции $\varepsilon(z)$ – диэлектрической проницаемости,

Это подтверждает, что решение уравнение Максвелла (4) существенно и сильно зависит от $\varepsilon(z)$ – диэлектрической проницаемости, сильно зависит от $\mu(z)$ – магнитной проницаемости, сла-

бее зависит от $\sigma(z)$ – электропроводности и $p(t)$ – тока в кабеле.

Алгоритм решения одномерной прямой задачи уравнения Максвелла. Одномерная прямая задача уравнения Максвелла решалась в области, показанной на рисунке 1:

$$\Delta(T) = \{(z, t) : z \in (-T, T), |z| < t < T\} \text{ при}$$

$$T = 2, \quad h = 2T/N = 0.04, \quad \tau = T/N = 0.02, \quad N = 200.$$

Алгоритм решения:

- вычисляются значения функций $p(t)$, $\sigma(z)$, $\mu(z)$, $\varepsilon(z)$;
- вычисляется интегральное уравнение Вольterra II порядка (6) или его аналог – дифференциальное уравнение первого порядка и определяется значение функции $S(z)$;
- характеристическим точкам $V(z, z)$ присваиваются значения $S(z)$ (на рисунке 1 отмечены 0);
- верхним характеристическим точкам (на рисунке 1) присваиваются значения $V(z, z + \Delta z) = S(z) + (S(z + \Delta z) - S(z))/\sqrt{2}$, это находится по формуле треугольников;
- поскольку шаг сетки по t в два раза меньше, чем шаги по z, вычисляются верхние характеристические точки (на рисунке 1): $V(z, z + \Delta z) = S(z) + (S(z + \Delta z) - S(z))/\sqrt{2}$;
- внутренние точки (на рисунке 1 отмечены *) вычисляются по формуле (4);
- внутренние дополнительные точки (на рисунке 1 отмечены как д) вычисляются также по формуле (4);
- после завершения вычисления определяется дополнительная информация одномерной обратной задачи уравнения Максвелла $dopin(t) = V(0, t)$.

Замечание 1. Если коэффициенты $\sigma(z)$, $\mu(z)$ и $\varepsilon(z)$ – четные функции, то время вычисления и объем машины почти в два раза сокращается.

Замечание 2. Алгоритм решения прямой задачи отличается от алгоритма [4] тем, что шаг сетки по $t = \frac{z}{2}$, а также устойчивость и сходимость проведенного нами решения улучшается почти в два раза.

Литература

1. Романов В.Г. Обратные задачи геоэлектрики / В.Г. Романов, С.И. Кабанихин. М.: Наука, 1991. 304 с.
2. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. М., 2005. 296 с.
3. Сатыбаев А.Дж. Конечно-разностно регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа / А.Дж. Сатыбаев. Ош, 2001. 143 с.
4. Сатыбаев А.Дж. Численная реализация одномерной прямой и обратной задачи термоупругости с мгновенным источником / А.Дж. Сатыбаев, Г.А. Калдыбаева, Т. Асилбеков // Вестник КазНПУ. 2012. № 2 (38). С. 139–146.