

УДК 519.63:532.5

ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВИЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВОДОЕМЕ

И.А. Турдушев

Разработан новый численный метод для определения интегральных составляющих вектора скорости. Проведены сравнительные численные эксперименты, демонстрирующие его эффективность.

Ключевые слова: математическое моделирование; гидродинамика водоемов; интегральная (баротропная) компонента; проекционный вариант интегро-интерполяционного метода.

DEVELOPMENT OF DIFFERENCE SCHEME FOR CALCULATION INTEGRAL PARTS OF MOTION IN THE THREE-DIMENSIONAL WIND FLOWS MODEL

I.A. Turdushev

It was developed a new numerical method for calculation integral parts of velocity vector. It was performed comparative numerical experiments that demonstrated efficiency of the numerical method.

Key words: mathematical modeling; hydrodynamics of reservoirs; integral (barotropic) component; projective variant of integro-interpolation method.

Введение. Общепринятый метод расчета скорости течений в задачах циркуляции жидкости в водоеме использует представление вектора горизонтальной скорости в виде суммы баротропной (интегральной) и бароклининой составляющих [1]. В работе [2] предлагается разностная схема для вычисления баротропной составляющей вектора скорости. Построение разностной схемы в [2] производится в два этапа. На первом этапе решаемая задача аппроксимируется по времени. При этом получается следующая система дифференциальных уравнений, которую необходимо решать на каждом шаге по времени:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon v) - \frac{\partial}{\partial y}(ku) + av + bu = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & (x, y) \in \Omega_0, \\ un_x + vn_y = 0, & (x, y) \in \partial\Omega_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ – компоненты баротропной составляющей; $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$, $k = k(x, y)$, $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $f = f(x, y)$ и $g = g(x, y)$ – известные достаточно гладкие функции; n_x , n_y – координаты единичного вектора внешней нормали к границе $\partial\Omega_0$ области Ω_0 .

На втором этапе задача (1) аппроксимируется по пространственным переменным. При этом используется проекционный вариант интегро-интерполяционного метода (ПВИИМ), подробно изложенный в работах [3, 4]. При численной реализации разностной схемы в [2] производные функций f и g , стоящие в правой части, рассчитываются с использованием формул численного дифференцирования. Данная операция может вносить ошибку, которая накапливается на каждом шаге по времени.

В настоящей работе предлагается новая разностная схема для численного решения задачи (1), которая не требует на каждом шаге по времени производить численное дифференцирование.

Результаты работы обсуждались на V конгрессе математиков тюркского мира [5] (Кыргызстан, Булан-Соготту, 5–7 июня, 2014 г.).

Разностная схема для задачи (1). Для построения разностной схемы используем ПВИИМ (см. [3, 4]). В области Ω_0 рассмотрим прямоугольную, вообще говоря, неравномерную сетку, пусть π – ее произвольная ячейка. Умножим первое уравнение системы (1) на некоторую, пока произвольную функцию $\varphi_1(x, y)$, второе уравнение – на произвольную функцию $\varphi_0(x, y)$, результаты сложим и проинтегрируем по ячейке π , в том числе и по частям. В итоге приходим к интегральному тождеству:

$$\int_{\partial\pi} [(u\varphi_0 + \varepsilon v\varphi_1)n_x + (v\varphi_0 - ku\varphi_1)n_y] ds - \int_{\pi} \left[u \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - k \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - b\varphi_1 \right) + v \left(\varepsilon \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - a\varphi_1 \right) \right] dx dy = \int_{\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) \varphi_1 dx dy. \quad (2)$$

Тестовые функции φ_0, φ_1 будем выбирать так, чтобы они в π удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - \bar{k} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \bar{b}\varphi_1 = 0, \\ \bar{\varepsilon} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial y} - \bar{a}\varphi_1 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами $\bar{\varepsilon}, \bar{k}, \bar{a}, \bar{b}$, аппроксимирующими в π функции ε, k, a, b – соответственно. Рассмотрим два варианта выбора функций φ_0, φ_1 . Пусть $\psi(x, y)$ – некоторая, достаточно гладкая и пока произвольная функция. Положим:

$$\varphi_0 = \bar{k} \frac{\partial\psi}{\partial y} + \bar{b}\psi, \quad \varphi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (4)$$

тогда первое уравнение в (3) будет выполнено для любой функции ψ . Удовлетворяя второму уравнению в, получим условие для выбора ψ :

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \bar{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \bar{a} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \bar{b} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \pi. \quad (5)$$

Второй вариант выбора тестовых функций основан на представлении:

$$\varphi_0 = -\bar{\varepsilon} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \bar{a}\psi, \quad \varphi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad (6)$$

В этом случае второе уравнение (3) в будет выполнено автоматически. Первому уравнению в (3) функции (6) будут удовлетворять при выполнении условия (5). Легко построить четыре линейно независимых решения уравнения (5), обращающихся в единицу в одной из вершин ячейки π и в ноль – во всех остальных. Для этого каждому горизонтальному ребру сетки $(x_i, x_{i+1}) \times \{y_j\}$ поставим в соответствие пару функций $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^{(0)}(x), \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^{(1)}(x)$, являющихся решением задачи:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j} \ddot{\alpha}(x) - a_{i+\frac{1}{2},j} \dot{\alpha}(x) &= 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \\ \alpha^{(0)}(x_i) &= \alpha^{(1)}(x_{i+1}) = 1, \quad \alpha^{(0)}(x_{i+1}) = \alpha^{(1)}(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Пусть вертикальным ребрам $\{x_i\} \times (y_j, y_{j+1})$ отвечают решения $\beta_{i,j+\frac{1}{2}}^{(0)}(y), \beta_{i,j+\frac{1}{2}}^{(1)}(y)$ задачи:

$$\begin{aligned} k_{i,j+\frac{1}{2}} \ddot{\beta}(y) + b_{i,j+\frac{1}{2}} \dot{\beta}(y) &= 0, \quad y \in (y_j, y_{j+1}), \\ \beta^{(0)}(y_j) &= \beta^{(1)}(y_{j+1}) = 1, \quad \beta^{(0)}(y_{j+1}) = \beta^{(1)}(y_j) = 0. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j} = \varepsilon \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, y_j \right), \quad k_{i,j+\frac{1}{2}} = k \left(x_i, \frac{y_j + y_{j+1}}{2} \right),$$

и аналогичные для a и b .

Теперь на прямоугольнике π определим четыре функции:

$$\psi^{(m,k)}(x, y) = \alpha_{i+\frac{1}{2},j+k}^{(m)}(x) \cdot \beta_{i+m,j+\frac{1}{2}}^{(k)}(y), \quad m, k = 0, 1.$$

Очевидно, что $\psi^{(m,k)}$ является решением (в π) уравнения

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+k} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + k_{i+m,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - a_{i+\frac{1}{2},j+k} \frac{\partial\psi}{\partial x} + b_{i+m,j+\frac{1}{2}} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

и удовлетворяет условиям:

$$\psi^{(m,k)}(x_{i+m}, y_{j+k}) = 1, \quad \psi^{(m,k)}(x, y) = 0,$$

для $(x, y) \in (\{x_{i-m+1}\} \times [y_j, y_{j+1}]) \cup ([x_i, x_{i+1}] \times \{y_{j-k+1}\})$.

Введем несколько дополнительных обозначений:

$$C^+(z) = z(\text{cth } z + 1), \quad C^-(z) = z(\text{cth } z - 1), \quad z \in R;$$

$$R_{i+\frac{1}{2},j}^x = \frac{\Delta x_i a_{i+\frac{1}{2},j}}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}}; \quad R_{i,j+\frac{1}{2}}^y = \frac{\Delta y_j b_{i,j+\frac{1}{2}}}{2k_{i,j+\frac{1}{2}}};$$

$$D_x^+ \xi_{i,j} = \frac{\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j}}{2}; \quad D_y^+ \xi_{i,j} = \frac{\xi_{i,j} + \xi_{i,j-1}}{2};$$

$$D_x^- \xi_{i,j} = \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i-1,j}}{2}; \quad D_y^- \xi_{i,j} = \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}}{2}.$$

После этого находим восемь пар тестовых функций φ_0, φ_1 из соотношений (4) и (6). Подставляя эти тестовые функции в тождество (2), мы автоматически избавляемся от главного интегрального слагаемого в его левой части, затем, аппроксимируя оставшиеся одномерные интегралы, в итоге получаем систему разностных уравнений для определения приближенных значений функций u и v в узлах сетки. Перед аппроксимацией интеграла, стоящего в правой части (2), производится его интегрирование по частям, чтобы производные с функций f и g перебросить на функции $\psi^{(m,k)}(x, y), m, k = 0, 1$. Таким образом, нам не нужно будет производить численное дифференцирование функций f и g . Опуская технические детали, выпишем итоговую систему разностных соотношений.

$$\begin{aligned}
& k_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i}{\Delta y_j} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j+1} \right) - \\
& - k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_i}{\Delta y_{j-1}} C^+ \left(R_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j} \right) + \\
& + \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_i} \left[C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) (\varepsilon \bar{v})_{i+1,j} - C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) (\varepsilon \bar{v})_{i,j} \right] = \\
& = k_{i,j+\frac{1}{2}} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) D_y^+ \left(\bar{u}_{i,j+1} \right) - \\
& - k_{i,j-\frac{1}{2}} C^+ \left(R_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) D_y^+ \left(\bar{u}_{i,j} \right) - \\
& - \square_{i+1,j} \left[\frac{\overline{\Delta y_j} \square_{i+\frac{1}{2},j}}{2 \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_i} \right] C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) - \\
& - \square_{i,j} \left[\frac{\overline{\Delta y_j} \square_{i+\frac{1}{2},j}}{2 \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_i} \right] C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) - \\
& - \frac{1}{2} C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \left[D_y^- \left(g_{i+1,j+1} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) + \right. \\
& \left. + D_y^- \left(g_{i+1,j} C^+ \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) \right] - \\
& - \frac{1}{2} C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \left[D_y^- \left(g_{i,j+1} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) + \right. \\
& \left. + D_y^- \left(g_{i,j} C^+ \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) \right], \quad (7)
\end{aligned}$$

где $\overline{\Delta y_j} = \frac{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}}{2}$. В случае, когда i таково, что мы выходим на левую вертикальную границу, уравнения (7) будут использоваться как разностные уравнения в узлах левой вертикальной границы для определения функции $\bar{v}_{i,j}$, которая там не задана. Отметим, что правые части в (7) в этом случае определены в силу граничных условий на $u_{i,j}$.

$$\begin{aligned}
& k_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta y_j} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j+1} \right) - \\
& - k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta y_{j-1}} C^+ \left(R_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j} \right) - \\
& - \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_{i-1}} \left[C^+ \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) (\varepsilon \bar{v})_{i,j} - C^- \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) (\varepsilon \bar{v})_{i-1,j} \right] = \\
& = -k_{i,j+\frac{1}{2}} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) D_y^+ \left(\bar{u}_{i,j+1} \right) + \\
& + k_{i,j-\frac{1}{2}} C^+ \left(R_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) D_y^+ \left(\bar{u}_{i,j} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - f_{i,j} \left[\frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_{i-1}} - \frac{\overline{\Delta y_j}}{2} \frac{a_{i-\frac{1}{2},j}}{\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}} \right] C^+ \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) + \\
& + f_{i-1,j} \left[\frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_{i-1}} + \frac{\overline{\Delta y_j}}{2} \frac{a_{i-\frac{1}{2},j}}{\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j}} \right] C^- \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) + \\
& + \frac{1}{2} C^+ \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) \left[\square_y^- \left(\square_{i,j+1} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) + \right. \\
& \left. + \square_y^- \left(\square_{i,j} C^+ \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} C^- \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) \left[\square_y^- \left(\square_{i-1,j+1} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) + \right. \\
& \left. + \square_y^- \left(\square_{i-1,j} C^+ \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) \right] \square \quad (8)
\end{aligned}$$

В случае выхода на правую вертикальную границу, уравнения (8) используются как граничные уравнения для определения $\bar{v}_{i,j}$, при этом значения $\bar{u}_{i,j}$ на вертикальных границах известны из краевых условий.

Уравнения для определения $\bar{v}_{i,j}$ во внутренних точках области теперь получаются после сложения (7) и (8), при этом значения $u_{i,j}$ окончательно исключаются:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Delta y_j} \left\{ k_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta y_j} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j+1} \right) - \right. \\
& \left. - k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Delta y_{j-1}} C^+ \left(R_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) D_y^- \left(\bar{v}_{i,j} \right) \right\} + \\
& + \frac{2}{\Delta x_i} \left\{ D_x^- \left(C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \frac{1}{\Delta x_i} (\varepsilon \bar{v})_{i+1,j} \right) - \right. \\
& \left. - D_x^- \left(C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \frac{1}{\Delta x_i} (\varepsilon \bar{v})_{i,j} \right) \right\} \square \\
& \square \frac{1}{\Delta x_i \square \Delta y_i} \left\{ -2 D_x^- \square_{i+1,j} \left(\frac{\overline{\Delta y_j} \square_{i+\frac{1}{2},j}}{2 \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_i} \right) \right. \\
& \square C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \square_{i,j} - 2 D_x^- \square_{i,j} \left(\frac{\overline{\Delta y_j} \square_{i+\frac{1}{2},j}}{2 \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{\overline{\Delta y_j}}{\Delta x_i} \right) \\
& \square C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \square_{i,j} - \frac{1}{2} C^+ \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) \\
& \square D_y^- \left(\square_{i+1,j+1} C^- \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) + D_y^- \left(\square_{i+1,j} C^+ \left(R_{i,j+\frac{1}{2}}^y \right) \right) \square_{i,j} - \\
& \left. - \frac{1}{2} \square C^- \left(R_{i+\frac{1}{2},j}^x \right) - C^+ \left(R_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) \square \right\}
\end{aligned}$$

$$\left[D_y^- \left(g_{i,j+1} C^- \left(R_{i,j+1/2}^y \right) \right) + D_y^- \left(g_{i,j} C^+ \left(R_{i,j+1/2}^y \right) \right) \right] + \frac{1}{2} C^- \left(R_{i-1/2,j}^x \right) \left[D_y^- \left(g_{i-1,j+1} C^- \left(R_{i,j+1/2}^y \right) \right) + D_y^- \left(g_{i-1,j} C^+ \left(R_{i,j+1/2}^y \right) \right) \right], \quad (9)$$

где $\overline{\Delta x_i} = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{2}$. Окончательно, для определения $\bar{v}_{i,j}$ получаем систему из уравнений (9) – во внутренних точках области, (7) и (8) – на вертикальных границах (при соответствующих значениях i), а также сюда добавляются граничные значения $\bar{v}_{i,j}$ на горизонтальных границах, которые известны в силу условий (1).

Строя аналогичным образом задачу для определения функции $u_{i,j}$, в итоге получаем разностную схему, которая может быть использована для численного решения системы (1) и определения баротропных компонент скорости в моделях гидродинамики глубоководных бассейнов.

Численные эксперименты. Для демонстрации работы построенной разностной схемы приведем результаты расчетов для тестовой задачи из работы [6]. Результаты разработанной разностной схемы сравнивали с результатами разностной схемы, построенной в работе [2]. Численные эксперименты проводили при следующих значениях параметров задачи из [6]:

$$\rho_0 = 1000, \ell_0 = 1, \beta = 0, r = 1, q = 1, H = 1, \mu = 0.5, F_1 = 10, F_2 = 0.$$

Относительную погрешность вычисляли по формуле:

$$Error(\varphi) = \frac{\max |\varphi_{i,j} - \tilde{\varphi}_{i,j}|}{\max |\varphi_{i,j}|} \cdot 100(\%),$$

где $\varphi_{i,j}, \tilde{\varphi}_{i,j}$ – точное и приближенное решения соответственно. Разностные схемы тестировали при различных значениях N и M – количество узлов сетки по направлениям x и y , соответственно, и τ – шаг по времени.

Ниже приведены результаты решения тестовой задачи с использованием схемы из работы [2]. Параметры схемы заданы следующим образом: $\theta = 1, \chi = 1$. На рисунке 1 приведены графики поведения погрешностей для функций \bar{u} (кривая 1) и \bar{v} (кривая 2) при значениях параметров численного метода $N = 20, M = 20, \tau = 0.1$. По оси абсцисс идет время, а по оси ординат – погрешность. На рисунке 2 приведены графики поведения погрешностей при значениях параметров $N = 60, M = 60, \tau = 0.1$.

На рисунках 3 и 4 приведены графики поведения погрешностей при решении тестовой задачи с использованием схемы, разработанной автором.

Численные эксперименты также были проведены при значениях параметров схем $N = 40, M = 40, \tau = 0.1$ и $N = 80, M = 80, \tau = 0.1$.

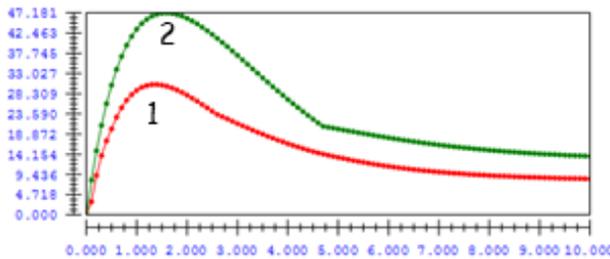


Рисунок 1 – Поведение погрешностей при $N = 20, M = 20, \tau = 0.1$

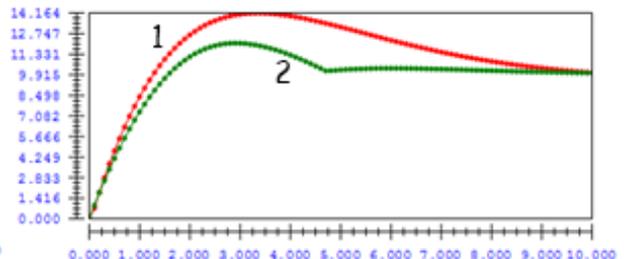


Рисунок 2 – Поведение погрешностей при $N = 60, M = 60, \tau = 0.1$

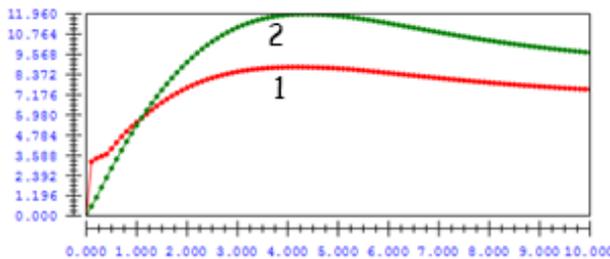


Рисунок 3 – Поведение погрешностей при $N = 20, M = 20, \tau = 0.1$

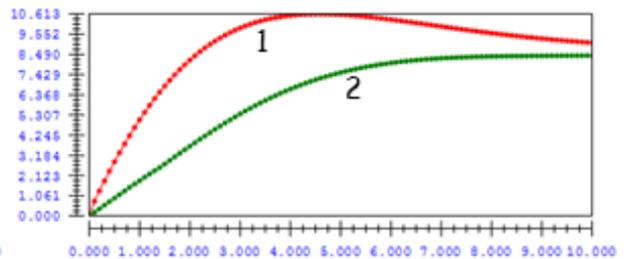


Рисунок 4 – Поведение погрешностей при $N = 60, M = 60, \tau = 0.1$

В таблице 1 приведены максимальные погрешности вычисления функций u и v с использованием схемы из [2] и разработанной разностной схемы.

Таблица 1 – Максимальные погрешности вычисления функций u и v

Параметры схемы	Схема из работы [2]		Разработанная схема	
	Егог(u), %	Егог(v), %	Егог(u), %	Егог(v), %
$N = 20, M = 20, \tau = 0.1$	30	47	8	12
$N = 40, M = 40, \tau = 0.1$	15	21	7	5
$N = 60, M = 60, \tau = 0.1$	14	11	11	8
$N = 80, M = 80, \tau = 0.1$	16	14	14	13

Анализ данных таблицы 1 позволяет сделать вывод, что разработанная разностная схема точнее, чем схема работы [2]. При этом погрешность предложенной схемы значительно ниже при небольшом числе узлов пространственной сетки ($N=20, M=20$ и $N=40, M=40$). Если же число узлов увеличивать, то предложенная разностная схема будет точнее на 1–3 %.

Литература

1. Марчук Г.И. Математическое моделирование циркуляции океана / Г.И. Марчук, А.С. Саркисян. М.: Наука, 1988. 302 с.
2. Skliar S.N., Rylov M.A. Computing of barotropic components of motion in problems of water circulation in reservoir. Study of the Issyk-Kul lake hydrodynamics with the use of isotopic methods, ISTC / S.N. Skliar, M.A. Rylov. Bishkek: Ilim, 2006. Part II. P. 21–30.
3. Еремеев В.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов / В.Н. Еремеев, В.П. Кочергин, С.В. Кочергин, С.Н. Скляр. Севастополь: “ЭКОСИ-Гидрофизика”, 2002. 238 с.
4. Скляр С.Н. О дискретизации задач с пограничным слоем при помощи одного проекционного варианта метода интегральных тождеств. I. Несамосопряженное уравнение, первая краевая задача / С.Н. Скляр // Изв. АН Кирг. ССР. Физ.-техн. и матем. науки. 1988. № 4. С. 10–23; II. Несамосопряженное уравнение, третья краевая задача // Там же. 1989. № 1. С. 3–10; III. Самосопряженное уравнение // Там же. 1989. № 4. С. 3–11.
5. Turdushev I., Skliar S. On calculation of integral parts of motion in the three-dimensional wind flows model / I. Turdushev, S. Skliar // Abstracts of V Congress of the Turkic World Mathematicians; ed. A. Vorubaev. Bishkek: Kyrgyz Mathematical Society, 2014. P. 257.
6. Турдушев И.А. Аналитические решения для трехмерной модели ветровых течений в водоеме / И.А. Турдушев, С.Н. Скляр // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений: матер. второй межд. юбил. конф., посв. 20-летию образов. КРСУ и 100-летию проф. Я.В. Быкова. 5–7 сент. 2013 г. / под общ. ред. проф. А.К. Керимбекова. Бишкек: Изд-во Maxprint, 2013. Т. 2. С. 214–218.