УДК 517.977.5

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В КЛАССЕ НЕМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

С.Б. Доулбекова

Исследована задача нелинейной оптимизации упругих колебаний в случае, когда действие внешнего источника описывается немонотонной функцией. Установлены неоднозначность соответствия между элементами пространств состояний и управлений и классы смежности функций управления. Описан алгоритм построения "оптимального" класса управлений.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; классы смежности; оптимальное управление; особые управления.

SOLUBILITY OF A NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEM OF ELASTIC VIBRATIONS IN THE CLASS OF NONMONOTONIC FUNCTIONS

S.B. Doulbekova

It was investigated the nonlinear optimization problem of the elastic vibrations in case when external source action is described by a nonmonotonic function. It was ascertained the correspondence ambiguity between elements of a states and controls spaces and cosets of control functions. The algorithm of construction the optimal set of controls was described.

Key words: boundary problem; functional; cosets; optimal control; special controls.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации упругих колебаний, где требуется минимизировать функционал

$$J[u]=\int_0^1\left\{[V(T,x)-\xi_1(x)]^2+[V_t(T,x)-\xi_2(x)]^2\right\}dx+\beta\int_0^T u^2(t)dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}=V_x+g(x)f[t,u(t)],\ \ 0<x<1,\ \ 0<t<T,$$

$$V(0,x)=\psi_1(x)\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\ \ 0<x<1,$$

$$V_x(t,0)=0,\ \ V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\ \ 0<t<T. \tag{2}$$

Здесь функция $V(t,x)$ описывает состояние управляемого колебательного процесса; функция внешнего источника $g(x)f[t,u(t)]$ задана и $g(x)\in H(0,1)$, $f[t,u(t)]\in H(0,T)$; $f[t,u(t)]$ – нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ не является монотонной; $\psi_1(x)\in H_1(0,1)$, $\psi_2(x)\in H(0,1)$ – функции начального состояния, $\xi_1(x)\in H(0,1)$, $\xi_2(x)\in H(0,1)$ функции желаемого состояния в конечный момент времени T; $H_1(x)$ – Соболева пространство первого порядка, $H(x)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве X.

Краевая задача (2) при каждом управлении $u(t)\in H(0,T)$ имеет обобщенное решение [1]:

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau\right]z_n(x), \tag{3}$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n}, g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $g(x)$; λ_n – корни трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ являются собственными значениями краевой задачи

$$z''(x)+\lambda^2 z(x)=0,\ \ z'(x)=0,\ \ z'(1)+\alpha z(1)=0,$$

соответствующими собственным функциям

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\ n=1,2,3,\ldots$$

Функции $z_n(x)$, n = 1, 2, 3… в пространстве $H(0,1)$ образуют ортонормированную систему функций.

Из элементов пространства управлений $H(0,T)$, для которых

$$f_u[t,u(t)]\neq 0,\ t\in(0,T),\tag{4}$$

образуем множество

$$\overline{H}(0,T)=\{u(t)\in H(0,T)|f_u[t,u(t)]\neq 0,\ t\in(0,T)\},$$

а из элементов $u(t)\in H(0,T)$, для которых

$$f_u[t,u(t)]=0,\ t\in(0,T),\tag{5}$$

образуем множество

$$\widetilde{H}(0,T)=\{u(t)\in H(0,T)|f_u[t,u(t)]=0,\ t\in(0,T)\}.$$

Ясно, что множества $\overline{H}(0,T)$ и $\widetilde{H}(0,T)$ не имеют общих элементов, т. е. их пересечение – пустое множество.

Заметим, что как в классе управлений $\overline{H}(0,T)$, так и в классе управлений $\widetilde{H}(0,T)$ могут быть элементы, для которых функция источника $g(x)f[t,u(t)]$ принимает одинаковое значение $\forall t\in(0,T)$. Это обстоятельство, согласно (3), приводит к тому, что соответствие между элементами пространства состояний $H(Q)$ и пространства управлений $H(0,T)$ будет не однозначным, т. е. элемент $V(t,x)\in H(Q)$ имеет много прообразов в пространстве управлений $H(0,T)$.

Применение принципа максимума для систем с распределенными параметрами [1, 2] в общем случае приводит к следующим условиям оптимальности:

$$f_u[t,u(t)]\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx-2\beta u(t)=0,\tag{6}$$

$$f_{uu}[t,u(t)]\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx-2\beta u(t)<0,\tag{7}$$

где $\omega(t,x)$ решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{gathered}\omega_{tt}=\omega_x,\ 0<x<1,\ 0<t<T,\\ \omega(T,x)+2[V_t(T,x)-\xi_2(x)]=0,\ 0<x<1,\\ \omega_t(T,x)-2[V(T,x)-\xi_1(x)]=0,\ 0<x<1,\\ \omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0<t<T.\end{gathered}\tag{8}$$

имеет вид

$$\omega(t,x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\cos\lambda_n(T-t)[V_n'(T)-\xi_{2n}]+\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)[V_n(T)-\xi_{1n}]\right\}z_n(x),$$

$$V_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau.\tag{9}$$

Согласно (9), равенство (6) приводим к виду

$$\beta u(t)=f_u[t,u(t)]\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau\right],\tag{10}$$

где

$$G_n(t)=\left\{\cos\lambda_n(T-t),\frac{1}{\lambda_n}g_n\sin\lambda_n(T-t)\right\},\ h_n=\{h_{1n},h_{2n}\},$$

$$h_{1n}=\xi_{2n}+\lambda_n\psi_{1n}\sin\lambda_n T-\psi_{2n}\cos\lambda_n T,$$

$$h_{2n}=\xi_{1n}-\psi_{1n}\cos\lambda_n T-\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n T.\tag{11}$$

Решение задачи оптимизации в классе управлений $\overline{H}(0,T)$. В этом случае уравнение (10) можно переписать в виде

$$\beta u(t) f_n^{-1}\left[t,u(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right], \tag{12}$$

а условие оптимальности (7) в виде

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(u(t) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]\right)_u > 0. \tag{13}$$

Задача (12)–(13) решается согласно методике работы [1]. Положим

$$\beta u(t) f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t). \tag{14}$$

Отсюда, согласно (13), функция $u\,(t)$ определяется однозначно т. е.

$$u(t)=\varphi\left[t,\,p(t),\beta\right]. \tag{15}$$

Согласно (14) и (15), функция $p\,(t)$ определяется, как решение нелинейного интегрального уравнения

$$p(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,\varphi(\tau,\,p(\tau),\beta)\right]d\tau\right], \tag{16}$$

которое при выполнении условий [3]

$$\left\|f\left[t,u(t)\right]-f\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_H \le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H,$$

$$\left\|\varphi\left[t,\,p(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\,\bar{p}(t),\beta\right]\right\|_H \le \varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar{p}(t)\right\|_H$$

$$T\left\|g(x)\right\|_H^2 f_0\varphi_0<1,\;\; f_0,\varphi_0(\beta)>0,$$

в пространстве H (0, T) имеет единственное решение. Это решение определяется методом последовательных приближений

$$p_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,\varphi(\tau,\,p_{k-1}(\tau),\beta)\right]d\tau\right],\; k=1,2,3,...,$$

причем имеет место оценка

$$\left\|p_*(t)-p_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}M,$$

где $p_*(t)$ – точное решение;

$$M=\left\|\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,\varphi(\tau,\,p_0(\tau),\beta)\right]d\tau\right]-p_0(t)\right\|_H;$$

$p_0(t)$ – произвольный элемент множества $\bar{H}(0,T)$, и

$$\lim_{k\to\infty} p_k(t)=p_*(t).$$

Функцию $p_*(t)$ подставим в (15) и получим решение нелинейного интегрального уравнения (12) в следующем виде:

$$u^*(t)=\varphi\left[t,\,p_*(t),\beta\right]. \tag{17}$$

Теперь вычислим

$$f\left[t,u^*(t)\right]=f^*(t)$$

и, решая алгебраическое уравнение

$$f\left[t,u(t)\right]=f^*(t), \tag{18}$$

находим все управления, которые образуют “оптимальный” класс смежности:

$$\bar{H}^*(0,T)=\left\{u(t)\in\bar{H}(0,T)\middle| f\left[t,u(t)\right]=f^*(t),\,t\in(0,T)\right\}.$$

Далее “оптимальный” процесс $V^*(t,x)$ находим по формуле

$$V^*(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau) g_n f\left[\tau,u^*(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x),$$

а минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$J\left[u^*(t)\right]=\int_0^1\left\{\left[V^*(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t^*(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T\left(u^*(t)\right)^2 dt. \tag{19}$$

Отметим, что для управлений класса $\bar{H}^*(0,T)$ имеет место неравенство

$$I[u^*(t)]\le I[u_i(t)],\; u_i(t)\in\bar{H}^*(0,T),$$

ибо неравенство обратного знака, хотя бы для одного управления $u_i(t)$, противоречило бы оптимальности управления $u^*(t)$.

Решение задачи оптимизации $\widetilde{H}(0,T)$. В этом случае условия оптимальности (6)–(7) вырождаются, и принцип максимума не дает никаких информаций об оптимальности управления. Поэтому, решая алгебраическое уравнение

$$f_u[t, u(t)] = 0, \tag{20}$$

находим элементы множества

$$\widetilde{H}(0,T) = \{\widetilde{u}_1(t), ..., \widetilde{u}_m(t)\}, \ m \le \infty.$$

Заметим, что множество $\widetilde{H}(0,T)$ также распадается на непересекающиеся классы $\widetilde{H}_i(0,T)$. Количество корней уравнения (20) конечное или не более чем счетное число. Вычислим значения $I[\widetilde{u}_m(t)]$, m = 1, 2, 3, ..., функционала и сравним их со значением $I[u^*(t)]$. Если окажется, что $I[u^*(t)] \le I[\widetilde{u}_m(t)], \forall m$, то $u^*(t)$ – оптимальное управление, если же окажется, что

$$I[u^*(t)] > I[\widetilde{u}_m^*] \le I[\widetilde{u}_m(t)], \forall m \ne m_0,$$

то оптимальным является управление $\widetilde{u}_{m_0}^*(t)$, которое называется особым оптимальным управлением.

Таким образом, установлено, что если $f[t, u(t)]$ не является монотонной функцией по функциональной переменной $u(t)$, $t \in [0,T]$, то

1. Пространство управлений $u(t) \in H(0,T)$ распадается на непересекающиеся классы функций $\overline{H}(0,T)$ и $\widetilde{H}(0,T)$, которые, в свою очередь, распадаются на непересекающиеся классы.
2. Соответствие между элементами пространства состояний и пространства управлений не однозначное, т. е. каждый элемент пространства состояний имеет хотя бы один прообраз в пространстве управлений.
3. Оптимальными могут быть и “особые управления”.

Литература

1. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.