

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ С ТРАПЕЦИЕВИДНОЙ ЭПЮРОЙ

Б. Жумабаев, А.А. Аманалиев, А. Ширяева

Показано распределение напряжений состояния полуплоскости от действия нагрузки с трапециевидной эпюрой. Приведены результаты расчета в изотропной и анизотропной полуплоскостях.

Ключевые слова: упругость; комплексные потенциалы; напряжения; деформация; нагрузка с трапециевидной эпюрой.

STRESS AND STRAIN STATE OF ISOTROPIC AND ANISOTROPIC HALF-PLANE UNDER THE ACTION OF LOAD WITH TRAPEZIODAL DIAGRAMS

B. Zhumabaev, A.A. Amanaliev, A. Shiryayeva

It is defined the distribution of stresses in the elastic half-plane of action of the load with trapezoidal Diagrams. It is given the results of the calculation in the isotropic and anisotropic half-plane.

Key words: elasticity; complex potentials; stress; deformation; load with trapezoidal Diagrams.

Связь между компонентами напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) и компонентами деформаций ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$) линейна, и выражается законом Гука для изотропного [1] или трансверсально-изотропного массива [2].

Граничные условия для полуплоскости $y = 0$ имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(n, y) = X_n, \\ \tau_{xy} \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) = Y_n. \end{cases} \quad (1)$$

На поверхности полупространства заданы внешние силы, которые действуют горизонтально и вертикально к дневной поверхности земли. Такие внешние силы обозначены через N и T , направлены нормально и по касательной к границе полуплоскости. Величины касательной T в (1) равны нулю всюду на границе полуплоскости. Вертикальные N нагрузки состоят из разности двух распределенных нагрузок с треугольными эпюрами $N(\xi) = N_1(\xi) - N_2(\xi)$. Законы их распределения одинаковы, но нагрузка N_1 направлена в сторону границы полуплоскости $y = 0$, а нагрузка N_2 противоположна по отношению к первой.

$$N_1(\xi) = \begin{cases} n = 0, \text{ если } \xi < L_1 \text{ и } \xi > L_4, \\ n = \frac{L_1 - \xi}{L_1} \cdot p_0, \text{ если } L_1 < \xi \leq L_2, \\ n = \frac{L_4 - \xi}{L_4} \cdot p_0, \text{ если } L_3 < \xi \leq L_4, \end{cases}$$

$$N_2(\xi) = \begin{cases} n = 0, \text{ если } \xi < L_{11} \text{ и } \xi > L_4, \\ n = \frac{L_{11} - \xi}{L_{11}} \cdot p_0, \text{ если } L_{11} < \xi \leq L_2, \\ n = \frac{L_{41} - \xi}{L_{41}} \cdot p_0, \text{ если } L_3 < \xi \leq L_4, \end{cases}$$

Внешняя нагрузка состоит из двух слагаемых, имеющих треугольные эпюры. Изменения интенсивности эпюр подчиняются одному и тому же закону. Однако направление действия второй нагрузки противоположно закону изменения первого. В результате верхняя часть первой нагрузки уничтожается эпюрой второй нагрузки и от первой нагрузки остается трапециевидная эпюра распределения внешней нагрузки. Аналитическое описание внешней нагрузки имеет вид:

$$N(\xi) = N_1(\xi) - N_2(\xi).$$

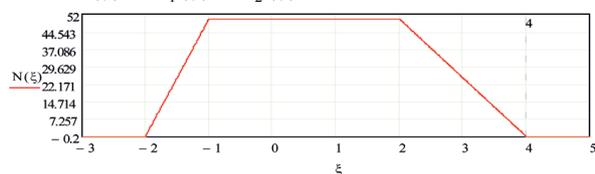


Рисунок 1 – Эпюра распределения внешней нагрузки
Закон распределения нагрузки имеет трапециевидную эпюру. Начало координат в плоскости $хоу$ совпадает с вершиной треугольной эпюры, где на-

грузка имеет наибольшее значение P_0 . Правый конец загруженного участка контура полуплоскости обозначен как L_4 , а левый конец – L_1 . На рисунке 1 показана эпюра распределенной нагрузки внутри участка между L_1 и L_4 . Вне отрезка нагрузка отсутствует.

Комплексные потенциалы для анизотропной полуплоскости имеют следующий вид:

$$p_0 = -100, L_1 = -2,$$

$$L_2 = 0, L_3 = 0, p_1 = \frac{-p_0}{2},$$

$$z(x, y) = x + i \cdot y, \quad \mu_1 = i \cdot 1,662,$$

$$\mu_2 = i \cdot 0,937, \quad z_2(x, y) = x + \mu_2 \cdot y,$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \cdot \frac{1}{2\pi i}$$

$$\Phi_{01}(x, y) = \frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_1}$$

$$\left[(L_1 - z_1(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_1 - z_1(x, y)} \right) - (L_2 - L_1) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{001}(x, y) = \frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{11}}$$

$$\left[(L_{11} - z_1(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_1(x, y)}{L_{11} - z_1(x, y)} \right) - (L_2 - L_{11}) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{02}(x, y) = \frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_4}$$

$$\left[(L_4 - z_1(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - z_1(x, y)}{L_4 - z_1(x, y)} \right) - (L_4 - L_3) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{002}(x, y) = \frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{41}}$$

$$\left[(L_{41} - z_1(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - z_1(x, y)}{L_{41} - z_1(x, y)} \right) - (L_{41} - L_3) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{21}(x, y) = -\frac{p_0 \cdot \mu_1}{L_1}$$

$$\left[(L_1 - z_2(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_1 - z_2(x, y)} \right) - (L_2 - L_1) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{0021}(x, y) = -\frac{p_1 \cdot \mu_1}{L_{11}}$$

$$\left[(L_{11} - z_2(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z_2(x, y)}{L_{11} - z_2(x, y)} \right) - (L_2 - L_{11}) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{22}(x, y) = -\frac{p_0 \cdot \mu_2}{L_4}$$

$$\left[(L_4 - z_2(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - z_2(x, y)}{L_4 - z_2(x, y)} \right) - (L_4 - L_3) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_{0022}(x, y) = -\frac{p_1 \cdot \mu_2}{L_{41}}$$

$$\left[(L_{41} - z_2(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_3 - z_2(x, y)}{L_{41} - z_2(x, y)} \right) - (L_{41} - L_3) \right] \cdot \Delta_0,$$

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{01}(x, y) - \Phi_{001}(x, y) + \Phi_{02}(x, y) - \Phi_{002}(x, y),$$

$$\Phi_2(x, y) = \Phi_{21}(x, y) - \Phi_{0021}(x, y) + \Phi_{22}(x, y) - \Phi_{0022}(x, y),$$

$$\sigma_x(x, y) = 2 \cdot \operatorname{Re}(\mu_1^2 \cdot \Phi_1(x, y) + \mu_2^2 \cdot \Phi_2(x, y)),$$

$$\sigma_y(x, y) = 2 \cdot \operatorname{Re}(\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y)),$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -2 \cdot \operatorname{Re}(\mu_1 \cdot \Phi_1(x, y) + \mu_2 \cdot \Phi_2(x, y)).$$

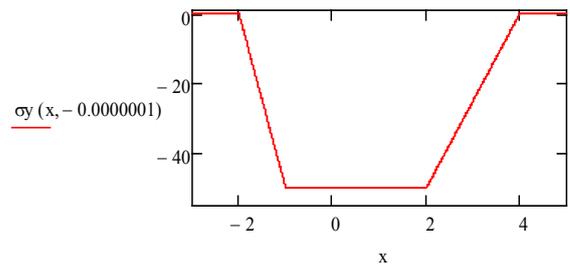


Рисунок 2 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = 0.0000001$ вблизи контура полуплоскости

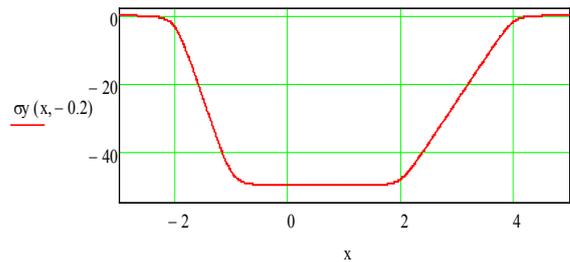


Рисунок 3 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = -0.2$ вблизи контура полуплоскости

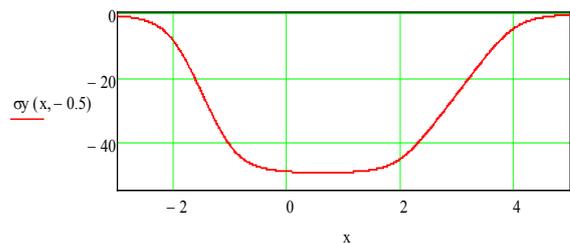
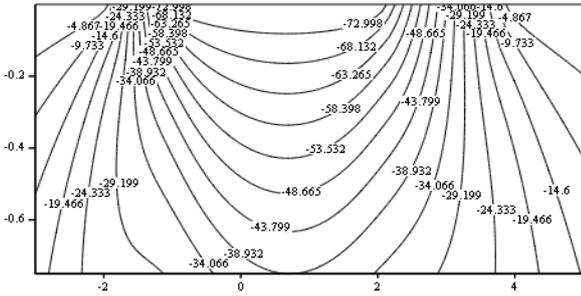


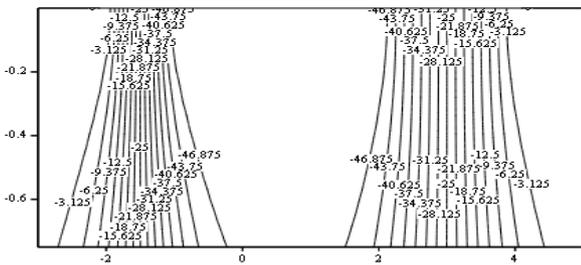
Рисунок 4 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = -0.5$ вблизи контура полуплоскости

Закономерности распределения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} в виде изолиний равных значений для нижней полуплоскости в окрестности загруженного участка контура полуплоскости показаны на рисунках 5–11.



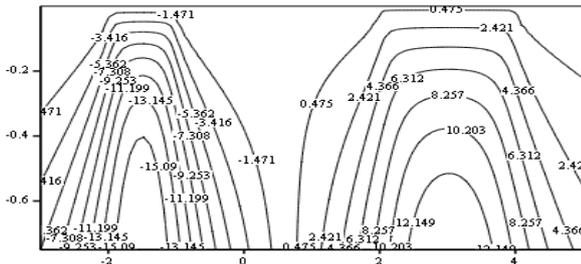
CreateMesh (Izolx, -3, 5, -0.000001, -0.75, 80, 40)

Рисунок 5 – Изолинии горизонтальной нормальной компоненты напряжений



CreateMesh (Izoly, -3, 5, -0.000001, -0.75, 80, 40)

Рисунок 6 – Изолинии вертикальной нормальной компоненты напряжений



CreateMesh (IzolT, -3, 5, -0.000001, -0.75, 80, 40)

Рисунок 7 – Изолинии касательной компоненты напряжений

Рассмотрим изотропную упругую полуплоскость. На контуре действует распределенная нагрузка с неравнобокой трапециевидной эпюрой (см. рисунок 1). Воспользуемся методом и общим решением первой основной задачи [1] для изотропной полуплоскости. Принимаем параметры для нагрузки и их места распределения такими же, как и для анизотропной полуплоскости:

$$p_0 = -100, \quad z(x, y) = x + i \cdot y,$$

$$zc(x, y) = x - i \cdot y,$$

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{P_0}{2\pi i L_1}$$

$$\left[(L_1 - z(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right) + (L_1 - L_2) \right],$$

$$\Phi_{11}(x, y) = -\frac{P_1}{2\pi i L_{11}}$$

$$\left[(L_{11} - z(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_{11} - z(x, y)} \right) + (L_{11} - L_2) \right],$$

$$\Phi_{1p}(x, y) = -\frac{P_0}{2\pi i L_1}$$

$$\left[-\ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_1 - z(x, y)} \right) + (L_1 - z(x, y)) \right]$$

$$\cdot \left(\frac{1}{L_1 - z(x, y)} - \frac{1}{L_2 - z(x, y)} \right) \Bigg],$$

$$\Phi_{11p}(x, y) = -\frac{P_1}{2\pi i L_{11}}$$

$$\left[-\ln \left(\frac{L_2 - z(x, y)}{L_{11} - z(x, y)} \right) + (L_{11} - z(x, y)) \right]$$

$$\cdot \left(\frac{1}{L_{11} - z(x, y)} - \frac{1}{L_2 - z(x, y)} \right) \Bigg],$$

$$\Psi_1(x, y) = -z(x, y) \cdot \Phi_{1p}(x, y),$$

$$\Psi_{11}(x, y) = -z(x, y) \cdot \Phi_{11p}(x, y),$$

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{P_0}{2\pi i L_4}$$

$$\left[(L_4 - z(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_4 - z(x, y)}{L_3 - z(x, y)} \right) + (L_3 - L_4) \right],$$

$$\Phi_{21}(x, y) = -\frac{P_1}{2\pi i L_{41}}$$

$$\left[(L_{41} - z(x, y)) \cdot \ln \left(\frac{L_4 - z(x, y)}{L_3 - z(x, y)} \right) + (L_3 - L_{41}) \right],$$

$$\Phi_{2p}(x, y) = -\frac{P_0}{2\pi i L_4}$$

$$\left[-\ln \left(\frac{L_4 - z(x, y)}{L_3 - z(x, y)} \right) + (L_4 - z(x, y)) \right]$$

$$\cdot \left(\frac{1}{L_3 - z(x, y)} - \frac{1}{L_4 - z(x, y)} \right) \Bigg],$$

$$\Phi_{21p}(x, y) = -\frac{P_1}{2\pi i L_{41}}$$

$$\left[-\ln \left(\frac{L_4 - z(x, y)}{L_{41} - z(x, y)} \right) + (L_{41} - z(x, y)) \right]$$

$$\cdot \left(\frac{1}{L_3 - z(x, y)} - \frac{1}{L_{41} - z(x, y)} \right) \Bigg],$$

$$\Psi_2(x, y) = -z(x, y) \cdot \Phi_{2p}(x, y),$$

$$\Psi_{21}(x, y) = -z(x, y) \cdot \Phi_{21p}(x, y),$$

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) - \Phi_{11}(x, y) - \Phi_{21}(x, y),$$

$$\Phi_p(x, y) = \Phi_{1p}(x, y) + \Phi_{2p}(x, y) - \Phi_{11p}(x, y) - \Phi_{21p}(x, y),$$

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) - \Psi_{11}(x, y) - \Psi_{21}(x, y),$$

$$S_1(x, y) = 4 \operatorname{Re}(\Phi(x, y)),$$

$$S_2(x, y) = 2(\overline{z(x, y)} \cdot \Phi_p(x, y) + \Psi(x, y)),$$

$$S_3(x, y) = \operatorname{Re}(S_2(x, y)),$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{S_1(x, y) - S_3(x, y)}{2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{S_1(x, y) + S_3(x, y)}{2},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(S_2(x, y)).$$

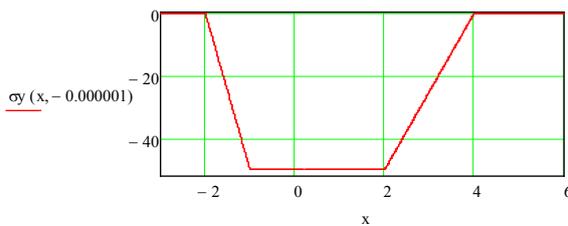


Рисунок 8 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = -0.000001$ вблизи контура полуплоскости

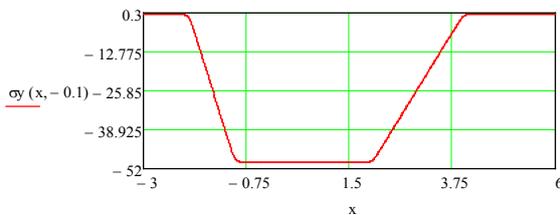


Рисунок 9 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = -0.1$ вблизи контура полуплоскости

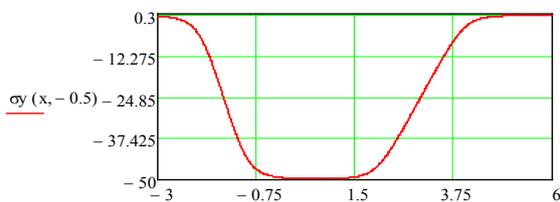
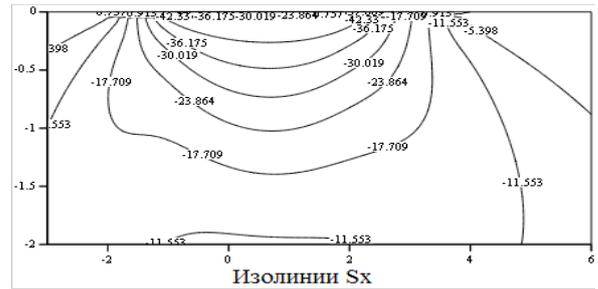
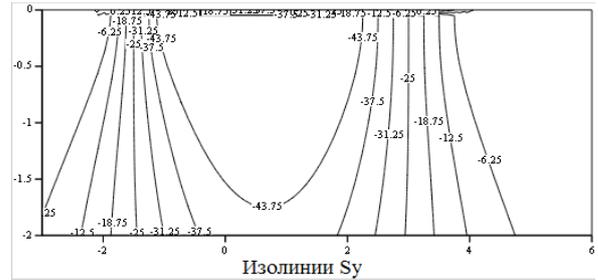


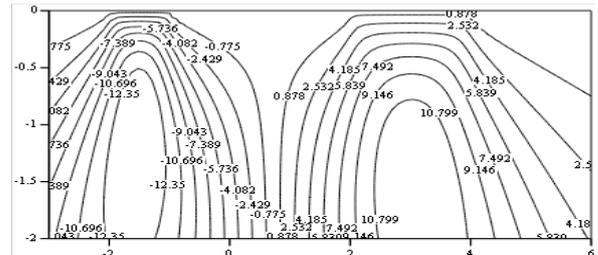
Рисунок 10 – Эпюра вертикальной нормальной компоненты напряжений при $y = -0.5$ вблизи контура полуплоскости



CreateMesh(Px, -3, 6, 0, -2, 80, 40)



CreateMesh(Py, -3, 6, 0, -2, 80, 40)



CreateMesh(Psxy, -3, 6, 0, -2, 80, 40)

Рисунок 11 – Изолинии касательных напряжений

Таким образом, приведенные результаты подтверждают решение двух граничных задач в случае, когда трапециевидная нагрузка равнобокая при L_1 и L_4 симметрична относительно начала оси абсцисс. Роль программы Маткад [4] для выполнения расчетов и доведения их до результатов, полученных в работах [1–3], весьма велика и придает им заверченный вид, необходимый для принятия проектных инженерных решений.

Литература

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Жумабаев Б.Ж. Распределение напряжений в массивах пород с гористым рельефом / Б.Ж. Жумабаев. Фрунзе: Илим, 1988. 190 с.
4. Кирьянов Д.В. Маткад 14 / Д.В. Кирьянов. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 704 с.