УДК 681.5:004.9

ДУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.П. Живоглядов

На основе предложенной методологии “дуальное управление 2.0” осуществлен аналитический синтез оптимальных регулярных и рандомизированных алгоритмов дуального управления динамическими объектами с запаздыванием. Использованы специфические свойства дельта-функций. Рассмотренные задачи не поддаются аналитическому решению в рамках классической теории дуального управления.

Ключевые слова: дуальное управление 2.0; динамическая система с запаздыванием; синтез алгоритмов; дельта-функция; многокритериальная оптимизация; рандомизированная стратегия.

DUAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS WITH DELAY

V.P. Zhivoglyadov

Based on the proposed methodology "dual control 2.0” analytical synthesis of optimal regular and randomized algorithms for dual control of dynamic objects with delay is carried out. It is used specific properties of delta functions. The above problem can’t be solved analytically in the framework of the classical theory of dual control.

Key words: dual control 2.0; dynamic system with delay; synthesis of algorithms; delta function; multiobjective optimization; randomized strategies.

Постановка задачи. Возникшие в технических науках идеи теории дуального управления с зондированием [1–6] оказались привлекательными для специалистов в области проектирования компьютерных систем управления технологическими процессами, математической теории управления, прикладных экономических исследований. Но в рамках принятой в классической теории формализованной модели во многих случаях аналитический синтез алгоритмов оказался практически невозможным. Применение вычислительных методов также сталкивается с огромными трудностями. Поэтому в [5] был предложен и в данной работе развивается конструктивный подход к синтезу алгоритмов дуального управления, названный “дуальное управление 2.0”.

Пусть выбранная динамическая модель объекта управления с запаздыванием τ задана в дискретном времени s с точностью до вектора случайных параметров .. и имеет вид:

$$S(\mu, s, \tau):$$

$$\begin{cases} x[s]-\mu_1 u[s-\tau]-\sum\limits_{i=2}^{r}\mu_i u[s-\tau-i+1]=0, \\ s=1,2,...n. \end{cases} \qquad (1)$$

Запишем модель (1) в более компактной форме:

$$x[s]-U^T[s-\tau]\mu=0. \qquad (2)$$

Модель наблюдений имеет вид:

$$y[s]=x[s]+h[s]. \qquad (3)$$

Приняты обозначения: x[s] – выход объекта в момент времени s; x^*[s] – задающее воздействие; h[s] – случайная помеха; u[s] – управляющее воздействие; $U^T[s]=(u[s],u[s-1],...,u[s-r+1])$. Применяется байесов подход. Плотности вероятности *P(μ)* и *P(h[s])* случайных факторов известны. Считаем, что параметры μ и помехи h[s] подчиняются нормальному закону распределению вероятностей, то есть плотности вероятности имеют вид:

$$P(\mu)\sim N\left(m[1],\ Q^{-1}[1]\right),\ P(h[s])\sim N\left(0,\ \sigma^2\right), \qquad (4)$$

где *m[1]* – априорное математическое ожидание μ, а $Q^{-1}[1]$ – априорная ковариационная матрица; σ^2 - дисперсия помехи *h[s], E{ h[s]}* = 0; где *E{.}* – знак математического ожидания.

Цель управления – обеспечить совпадение или близость выхода объекта x[s] в момент времени s и задающего воздействия x^*[s]. Все x^*[s] считаем известными. Первые τ тактов управление осуществляется без обратной связи, исключительно на основе априорной информации. Накопление информации начинается с (τ+1)-го момента времени. Задача синтеза системы управления с дуальными свойствами состоит в выборе таких стратегий $\Gamma[s]\ =P(u[s]\ x^*[s+\tau],I[s])$, чтобы обеспечить максимизацию как текущих значений показателей эффективности управления $J[s]$, так и будущих $J(k|s)$, $k = s+1, s+2, \ldots$, при заданных $x^*[s]$ и накопленной к текущему моменту информации $I[s]=I_s$, содержащейся в наблюдениях $\left(u^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1]\right)$.

При этом $J[s] = E\left\{e[s] \| u^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1], x^*[s]\right\}$.

Или $J[s] = E\left\{e[s] | I[s], x^*[s]\right\}$.

Обозначено: $J(k|s) = E\left\{J[k] \| I[s], x^*[k]\right\}$, $k = s+1, s+2, \ldots$.

Требуется разработать методику синтеза алгоритмов, позволяющую находить такие стратегии дуального управления, чтобы оптимизировать векторный критерий успешности управления M с компонентами $M[s]$ при некоторых ограничениях G на управления $u[s]$. Здесь $M[s] = E\{e[s]\}$ – локальный критерий для s-го момента времени; e[s] – специально выбранная целевая функция. Стратегию управления $\Gamma[s] = P(u[s] \| x^*[s+\tau], I[s])$ предполагаем для общности случайной (рандомизированной), заданной в виде условной плотности вероятности $P(.)$, зависящей от задания $x^*[s+\tau]$ и информации $I[s]= I_s$, накопленной к s-му моменту времени и содержащейся в априорных сведениях и множестве измерений входов и выходов объекта $\left(u^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1]\right)$. Стрелками сверху отмечены временные векторы вида $u^{\rightarrow}[s] = \left(u[1], \ldots, u[s]\right)^T$. Если стратегия регулярная, то $\Gamma[s]$ превращается в дельта-функцию, причем локально оптимальное управление $u^*[s]$ зависит от I_s и задания $x^*[s+\tau]$. В данной постановке задача не полностью определена и нуждается в доопределении в процессе синтеза алгоритмов с учетом предпочтений разработчика системы управления.

Свойства дельта-функций. Предварительно приведем некоторые формулы, характеризующие свойства дельта-функции $\delta(\mu)$ векторного аргумента μ размерности r.

Пусть r = 1. Тогда $\delta(\mu) = \infty$ при μ = 0, $\delta(\mu) = 0$ при μ≠ 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu)\, d\mu = 1, \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - v) f(\mu)\, d\mu = f(v),$$

$$\delta(a\mu) = |a|^{-1} \delta(\mu), |a| \delta(a\mu) = \delta(\mu),$$

где a – константа.

Для многомерных пространств при r ≥ 1 справедливы соотношения:

$$\delta(-\mu) = \delta(\mu), \delta(\mu) = \prod_{i=1}^{r} \delta(\mu_i),$$

$$|a|^r \delta(a\mu) = \delta(\mu), \delta(a\mu) = |a|^{-r} \delta(\mu),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mu - V) f(\mu)\, d\mu_1 \ldots d\mu_r = f(V).$$

Пусть заданы матричные уравнения $X = A\mu$ и $X^* = A\mu^*$. При этом

$$\delta(X - X^*) = |A|^{-1} \delta(\mu - \mu^*), |A| \delta(X - X^*) = \delta(\mu - \mu^*),$$

где $|A|$ – определитель матрицы $\boldsymbol{A}$.

Метод синтеза алгоритмов дуального управления 2.0. В работе [5] начато развитие методологии дуального управления 2.0 , которая позволяет преодолеть многие трудности, встречающиеся в классической теории. Метод синтеза включает следующие этапы:

1. Построение модели успешного управления при наличии полной информации, то есть модели связи управляющих воздействий u[s] и параметров μ при условии равенства выходов x[s+τ] и задающих воздействий $x^*[s+\tau]$ для любого момента времени s, и при отсутствии случайных помех h. На этом этапе выполняется решение обратной коэффициентной задачи управления в условиях определенности.

2. Рассмотрение задачи идентификации, нахождение апостериорной плотности вероятности неизвестных параметров μ с использованием накопленной к текущему моменту информации $I[s] = I_s$, содержащейся в наблюдениях $\left(u^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1]\right)$.

3. Интеграция полученных результатов двух обратных задач и оптимизация по локальному критерию, нахождение локально оптимальной стратегии управления $\Gamma^*[s]$.

4. Многокритериальный синтез алгоритмов дуального управления.

Применим предложенную методологию к задаче управления динамическим объектом с запаздыванием, модель которого описывается системой уравнений (1).

Решение обратной коэффициентной задачи оптимального управления. Введем в рассмотрение систему r уравнений S(μ) для обратной коэффициентной задачи при h = 0.

$$S(\mu): \begin{cases} x[s] - U^T[s-\tau]\mu = 0 \\ \vdots \\ x[j] - U^T[j-\tau]\mu = 0 \quad \tau < j < s. \\ \vdots \end{cases} \tag{5}$$

В более компактной форме система S(μ) имеет вид:

$$X(s,j) - U(s-\tau, j)\mu = 0 , \tag{6}$$

где $X(s,j) = (x[s], \ldots, x[j], \ldots)^T$
$U(s-\tau, j) = (U[s-\tau], \ldots, U[j-\tau], \ldots)^T$

Аналогично: $X(s+\tau, j) = (x[s+\tau], \ldots, x[j], \ldots)^T$
$U(s,j) = (U[s], \ldots, U[j], \ldots)^T$

Найдем корень μ = μ* системы S(μ) при $x[s+\tau] = x^*[s+\tau]$

$$\mu * = root\left\{S(\mu)\middle| x[s+\tau] = x*[s+\tau]\right\}. \qquad (7)$$

Получим:

$$\mu * = \mu * [s] = U^{-1}(s, j) X * (s+\tau, j), \qquad (8)$$

где $X*(s+\tau, j) = (x*[s+\tau], x[s+\tau-1], ..., x[j], ...)^T$.

Выбор j осуществляем произвольно, но так, чтобы в (8) обратная матрица существовала.

Результатом этого этапа является получение зависимости между параметрами μ и управляющими воздействиями *u* при условии $x[s+\tau] = x*[s+\tau]$ и отсутствии помех *h,* то есть нахождение корня μ*= μ*[s] системы r уравнений для $(s+\tau)$ -го и j-х моментов времени, $s+\tau-1 \ge j \ge \tau+1$.

Решение задачи идентификации. Следующий этап – получение апостериорной плотности вероятности *P(μ|I[s]).* Применяется байесов подход. Если случайные параметры μ и помехи измерений *h* подчиняются нормальному закону, то для модели объекта, линейной по параметрам, апостериорная плотность вероятности перед s-м тактом управления также гауссовская [7]:

$$P(\mu \mid I[s]) = P_s(\mu) \sim N(m[s], Q^{-1}[s]).$$

$$P_s(\mu) = \sqrt{|Q[s]|(2\text{л})^{-r}}$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2}(\mu - m[s])^T Q[s](\mu - m[s])\right\}, \qquad (9)$$

где $m[s] = (m_1[s]...m_r[s])^T$ – математическое ожидание параметра *μ* на основе информации I_s,

$Q_s^{-1} = Q^{-1}[s]$ – ковариационная матрица апостериорного распределения.

Рекуррентные формулы имеют вид:

$$m[s+1] = Q_{s+1}^{-1}(\sigma^{-2}U[s-\tau]y[s] + Q_s m[s]), \qquad (10)$$

$$Q_{s+1} = Q_s + \sigma^{-2}U[s-\tau]U^T[s-\tau]. \qquad (11)$$

При *r*=1 имеем: $P(\mu \mid I[s]) = P_s(\mu) \sim N(m[s], D[s])$, где $Q^{-1}[s] = D[s] = D_s$.

$$P_s(\mu) = \sqrt{(2\text{л}D_s)^{-1}}\, exp\left\{-\frac{1}{2D_s}(\mu - m[s])^2\right\}, \qquad (12)$$

$$D_{s+1}^{-1} = D_s^{-1} + \sigma^{-2}u^2[s-\tau].$$

Нахождение локально оптимальной стратегии управления Г*[s]. Интеграцию решений первых двух задач (управления и идентификации) осуществляем путем введения локального для s-го момента критерия *J[s]* – индекса успешности управления с выбором специальной целевой функции $e[s] = \delta(\mu*-\mu)$. Покажем связь данной целевой функции с ошибкой слежения $(x*[s+\tau]-x[s+\tau])$. Вначале рассмотрим случай $r=1$. Используя соотношения $x[s+\tau]-u[s]\mu=0$, $x*[s+\tau]-u[s]\mu*[s]=0$ и приведенные выше свойства дельта-функций, получаем:

$$e[s] = \delta(\mu*-\mu) = \delta(u^{-1}[s]$$
$$x*[s+\tau]-u^{-1}[s]x[s+\tau]) =$$
$$= |u[s]|\,\delta(x*[s+\tau]-x[s+\tau])$$

Пусть $r \ge 1$. При этом $\mu* = \mu*[s] = U^{-1}(s, j)$ $X*(s+\tau, j)$

$$e[s] = |U(s,j)|\,\delta(X*(s+\tau,j) - U(s,j)\mu) =$$
$$= |U(s,j)|\,|U(s,j)|^{-1}\,\delta(U^{-1}(s,j)$$
$$X*(s+\tau,j) - \mu) = \delta(\mu*-\mu) \qquad (13)$$

Решаем локальную задачу оптимизации по локальному критерию *M[s]:*

$$M[s] = E\{J[s]\} =$$
$$= \int_{\Omega(u^{\rightarrow}[s-\tau-1],\, y^{\rightarrow}[s-1])} J[s] P\left(u^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1]\right) d\Omega,$$

где

$$J[s] = \int_{\Omega(\mu, u[s])} e[s] P\left(\mu, \mathrm{u}[s] \middle| \mathrm{u}^{\rightarrow}[s-\tau-1],\right.$$
$$\left. y^{\rightarrow}[s-1], x*[s+\tau]\right) d\Omega, \qquad (14)$$

$$J*[s] = \max_{u[s]}\{J[s]\}.$$

Обозначим

$$\alpha[s] = \int_{\Omega(\mu)} e[s] P\left(\mu \middle| \mathrm{u}^{\rightarrow}[s-\tau-1], y^{\rightarrow}[s-1]\right) d\mu. \qquad (15)$$

Тогда

$$e[s] = \delta(\mu - \mu*)$$

$$J[s] = \sqrt{|Q[s]|(2\text{л})^{-r}}\, exp\{-\frac{1}{2}(\mu* - m[s])^T Q[s](\mu* - m[s])\}$$

$$J[s] = \int_{\Omega(u[s])} \alpha[s] P\left(u[s] \middle| u^{\rightarrow}[s-\tau-1],\right.$$
$$\left. y^{\rightarrow}[s-1], x*[s+\tau]\right) d\Omega. \qquad (16)$$

Учтено, что при заданных *I[s]* стратегии *Г[s]* не зависят от *μ*.

Выбрав , получим:

$$\mathrm{J}[s] = \int_{\Omega(\mathrm{u}[s])} \alpha[s] \Gamma[s]\, \mathrm{d}\Omega \qquad (17)$$

$$\alpha[s] = \int_{\Omega(\mu)} \delta(\mu - \mu*)\, P(\mu \mid I[s])\, d\Omega \sim max. \qquad (18)$$

Удобнее в качестве локального критерия использовать квадратичную функцию от J[s]:

$$R[s] = 2\neq(J[s])^2. \qquad (19)$$

Подставив (18) в (17), после интегрирования получим:

$$J[s] = \sqrt{|Q[s]|(2л)^{-r}}$$

$$exp\{-\frac{1}{2}(\mu^* - m[s])^T Q[s](\mu^* - m[s])\}. \quad (20)$$

Из (20) видно, что максимумы по *u[s]* показателей *J[s]* и соответственно *R*[s] и *α[s]* достигаются при выполнении условия

$$\propto^* - m[s] = U^{-1}(s,j)X^*(s+\tau,j) - m[s] = 0 \quad (21)$$

$$u^*[s] = arg \max_{u[s]} \{J[s]\}.$$

Отсюда получаем:

$$X^*(s+\tau,j) - U(s,j)m[s] = 0. \quad (22)$$

Управление u[s] входит в (22) только в верхнюю строку соответствующей матрицы и не зависит от переменных в j-е моменты времени.

Из (22) находим:

$$u^*[s] = (m_1[s])^{-1}(x^*[s+\tau] -$$

$$-\sum_{i=2}^{r} m_i[s]u[s-i+1]). \quad (23)$$

По структуре алгоритм (23) эквивалентен алгоритму управления в условиях полной определенности. В результате получаем алгоритм локально оптимального пассивно адаптивного управления с регулярной стратегией:

$$\Gamma[s] = P(u[s] \mid I[s], x^*[s+\tau]) =$$

$$= \delta(u[s] - u^*[s]), \quad (24)$$

$$J^*[s] = \max_{u[s]} \{J[s]\}.$$

При этом максимумы показателей J[s] и R[s] соответственно равны:

$$J^*[s] = \sqrt{|Q[s]|(2л)^{-r}}$$

и $R^*[s] = 2\pi(J^*[s])^2 = /Q[s]/,$ (25)

где $|Q[s]|$ – определитель матрицы *Q[s]*.

В формулах (24) и (25) *u*[s]* и *J*[s]* , *R*[s]* – локально оптимальные значения управления и критериев.

Синтез алгоритмов дуального управления. Заметим, что оптимальное управление $u^{opt}[n]$ в последний момент времени *n* совпадает с локально оптимальным управлением *u*[n]*. От управления *u[s]* могут зависеть не только критерии *J[s], R[s]*, но и будущие значения критериев *J[s+k], R[s+k], k=1,2,…,* а также их локально оптимальные значения:

$$J^*[s+k] = \max_{u[s+k]} \{J[s+k]\}.$$

При этом $J^*[s+k] = \sqrt{|Q[s+k]|(2;)^{-r}}$,

$$E\{J^*[s+k] | I[s]\} = J^*[s+k].$$

Задачу синтеза алгоритмов дуального управления с активным накоплением информации рассмотрим как задачу многокритериальной оптимизации с ограничениями *G* двух типов (26) и (27):

$$G_1 : u[s] \in \Omega_u[s] : u^*[s]-$$

$$-\Delta[s] \le u[s] \le u^*[s] + \Delta[s], \quad (26)$$

$$G_2 : E\{u[s]\} = \int_{\Omega(u)} u[s]\Gamma[s]d\Omega = u^*[s]. \quad (27)$$

Здесь Ω(u) – область изменения аргументов, а dΩ – ее бесконечно малый элемент. Ограничение (26) определяет допустимую область $\Omega_u[s]$ изменения *u[s]* в окрестности локально оптимального управления *u*[s]*, то есть величину допустимых уступок, на которые можно пойти для более активного зондирования и более эффективного управления в будущем. Величину уступок логично выбирать в прямой зависимости от уровня текущей неопределенности. Стохастическое ограничение (27) означает, что управления *u[s]* должны быть в среднем равны локально оптимальным значениям *u*[s]*.

Рассмотрим два типа задач многокритериальной оптимизации – с ограничением G_1 :

$$\max_{u[s]}\{J(s+1,n)|G_1\}, \text{ и } \max_{u[s]}\{R(s+1,n)|G_1\}, \quad (28)$$

и с ограничениями G_1 G_2:

$$\max_{u[s]}\{J(s+1,n)|G_1,G_2\}, \text{ и } \max_{u[s]}\{R(s+1,n)|G_1,G_2\}. \quad (29)$$

Обозначено:

$$J(s+1,n) = (J^*[s+1],...,J^*[n])^T,$$

$$R(s+1,n) = (R^*[s+1],...,R^*[n])^T.$$

В системе возможно активное накопление информации, если критерии (29) зависят от управлений u[s]. Пусть $|Q[i]|$ – выпуклые вниз функции предшествующих управлений *u[s], s = 1,…, n-1*. Тогда все оптимальные по векторным критериям типа (30) и (31) управления *u[s] , s =1,…, n-1,* лежат на границах допустимых областей (26).

Дуальное управление s-й момент принимает вид:

$$u^{opt}[s] = (sign\, u^*[s])(|u^*[s]| + \Delta[s]) =$$

$$= u^*[s] + (sign\, u^*[s])\Delta[s]. \quad (30)$$

Видно, что дуальное управление носит разрывный характер – при переходе через нуль оно меняется скачком.

Перейдем к синтезу алгоритмов дуального управления при наличии вероятностных ограничений. Стохастическое ограничение (27) *E{u[s]}=u*[s], s = 1,2,…* предполагает возможность применения рандомизированной стратегии. Решение будем искать в классе случайных стратегий *Γ[s]*. В полученной таким образом задаче стохастической оптимизации все критерии $J^*[s+k], k=1,2,\ \dots,$ – это выпуклые вниз функции управлений $u[s]$.

Поэтому оптимальная стратегия $\Gamma^{opt}[s]$ смешанная (рандомизированная):

$$\Gamma^{opt}[s]=\begin{pmatrix}\delta(u[s]-u^*[s]-\Delta[s]) & \text{с вероятностью } 0{,}5\\ \delta(u[s]-u^*[s]+\Delta[s]) & \text{с вероятностью } 0{,}5\end{pmatrix}. \quad (31)$$

Перепишем (32) в более простом виде:

$$u^{opt}[s]=u^*[s]+\psi[s], \quad (32)$$

где

$$\psi[s]=\begin{pmatrix}\Delta[s] & \text{с вероятностью } 0{,}5\\ -\Delta[s] & \text{с вероятностью } 0{,}5\end{pmatrix}.$$

Смешанную стратегию (32) можно аппроксимировать регулярной стратегией, заменив $\psi[s]$ на знакопеременную зондирующую составляющую.

Заключение. Предложенная методология “дуальное управление 2.0” принципиально отличается от принятой в классической теории дуального управления. Она позволяет осуществлять аналитический синтез регулярных и рандомизированных алгоритмов управления объектами со случайными параметрами, открывает практические возможности структурного синтеза и проектирования алгоритмов активно-адаптивного управления.

Литература

1. *Фельдбаум А.А.* Теория дуального управления. I, II, III, IV / А.А. Фельдбаум // Автоматика и телемеханика. 1960. 21(9), 21(11); 1961. 22(1), 22(2).
2. *Filatov N.M. and Unbenhauen H.* Adaptive Dual Control: Theory and Applications, vol. 302 of Lecture Notes in Control and Information Sciences / N.M. Filatov and H. Unbenhauen. New York: Springer-Verlag, 2004.
3. *Zhivoglyadov V.P., Rao G.P. and Filatov N.M.*. Application of δ-operator Models to Active Adaptive Control (AAC) of Continuous-Time (CT) Plants / *V*.P. Zhivoglyadov, G.P. Rao and N.M. Filatov // Control-Theory and Advanced Technology. 1993. Vol. 9. No. 1. P. 127–137.
4. *Живоглядов В.П.* Адаптация в автоматизированных системах управления технологическими процессами / В.П. Живоглядов. Фрунзе: Изд-во АН Кирг. ССР, 1974.
5. *Живоглядов В.П.* Построение альтернативной теории дуального управления / В.П. Живоглядов // Вестник КРСУ. 2012. Том 12. № 10.
6. *Живоглядов В.П.* Синтез алгоритмов дуального управления следящей системой / В.П. Живоглядов // Доклады НАН КР. 2014, № 2.
7. *Кашьяп Р.Л., Рао А.П.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Р.Л. Кашьяп, А.П. Рао / пер. с англ. М.: Наука. Физматгиз, 1983. 384 с.