УДК 517.97

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПОДВИЖНОМ ТОЧЕЧНОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ

А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева

Исследованы некоторые особенности построения приближенного решения задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Исследована сходимость приближенного решения и найдены достаточные условия сходимости.

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; оптимальный процесс; приближенное решение; сходимость.

ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССИН КЫЙМЫЛДУУ ЧЕКИТТИК БАШКАРУУ УЧУРУНДАГЫ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ОПТИМАЛДАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЖАКЫНДАШТЫРЫЛГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Бул макалада теңдемеде Фредгольмдун интегралдык оператору башкаруу процессинде камтылганда, жылуулук процессин кыймылдуу чекиттик башкаруу учурундагы сызыктуу эмес оптималдаштыруу маселесин жакындаштырып чыгаруунун айрым өзгөчөлүктөрү изилденген. Жакындаштырылган чыгарылыштын окшоштугу изилденген жана алардын окшоштугунун жетиштүү шарттары табылган.

Түйүндүү сөздөр: функционал, оптималдык башкаруу, оптималдык процесс, жакындаштырылган чыгарылыш, окшоштук.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION IN THE CASE OF MOBILE POINT CONTROL OF THE THERMAL PROCESS

A. Kerimbekov, A.T. Ermekbaeva

The article investigates some features of the construction of the approximate solution of the problem of nonlinear optimization for the mobile point control of the thermal process in the case, when the boundary value problem of a controlled process in the equation contains the integral Fredholm operator. The convergence of the approximate solution is studied and sufficient conditions for their convergence are found.

Keywords: functional; optimal control; optimal process; approximate solution; convergence.

Введение. При исследовании задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, обнаруживается, что наличие интегрального оператора того или иного вида приводит к изменению структуры решения задачи нелинейной оптимизации [1–3]. В работах [4, 5] исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом в случае, когда краевая задача управляемого процесса в уравнении содержит интегральный оператор Фредгольма. Данная статья является продолжением исследований [4, 5]. Здесь мы приведем из этих работ некоторые данные, которые могут быть использованы при доказательстве сходимости приближенных решений. В работах [4, 5] исследованы вопросы о разрешимости задачи нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\quad \beta>0$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_t = V_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + \delta(x - x_0(t))f[t,u(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T$$

$$V(0,x) = \psi(x), \ 0 < x < 1,$$

$$V_x(t,0) = 0, \ V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \quad 0 < t \le T.$$

где заданные функции $\xi(x) \in H(0,1)$, $\psi(x) \in H(0,1)$ и ядро $K(t,\tau)$, определеные в области $D = \{0 \le t \le T, 0 \le \tau \le T\}$, являются элементами гильбертова пространства $H(Y)$. Здесь $H(Y)-$ пространство Гильберта квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y, $f[t,u(t)] \in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ – нелинейна по функциональной переменной $u(t) \in H(0,T)$ и является монотонной функцией, т. е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u(t)} \ne 0, \ \forall t \in [0,T];$$

$\delta(x - x_0(t))-$ сингулярная обобщенная функция Дирака, $0 < x_0(t) < 1$; T – фиксированный момент времени; α – положительная постоянная; λ – параметр.

В работах [4, 5] построено полное решение задачи нелинейной оптимизации, то есть найдены

1) оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, q^0(t), \beta\right], \tag{1}$$

где $q^0(t)$ – известная функция, являющаяся элементом пространства $H(0,T)$;

2) оптимальный процесс

$$V^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right] + \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[(\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right\}z_n(x), \tag{2}$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента ядра

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}K(\tau,s)d\tau, \tag{3}$$

а $\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)$ является функцией вида

$$\varepsilon_n(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} + \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0 \le \tau \le t, \\ \lambda\int_\tau^T R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t \le \tau \le T, \end{cases} \tag{4}$$

которая при $t = \tau$ терпит разрыв, равный 1;

3) формула вычисления минимального значения функционала:

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[V(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt, \quad \beta > 0. \tag{5}$$

Поскольку полное решение задачи нелинейной оптимизации представлено в виде суммы бесконечных рядов, то выписать их явный вид не всегда удается, поэтому на практике ограничиваются построением приближенного решения задачи, которое заменяет точное решение с некоторой заданной погрешностью. Далее выписываем приближения полного решения задачи нелинейной оптимизации и исследуем их сходимость.

1. Приближение оптимального управления и их сходимость

В работе [5] показан алгоритм построения приближений оптимального управления, то есть он определяются по формулам

$$u_n(t) = \varphi\left[t, q_n(t), \beta\right], \ n = 1,2,3,..., \tag{6}$$

где $q_n(t)$ находится методом последовательных приближений, как решение нелинейного интегрального уравнения, и в пределе совпадает с точным решением, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(t) = q^0(t)$, причем удовлетворяет оценке

$$\left\| q^0(t) - q_n(t) \right\|_{H(0,t)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| G\left[h(t)\right] \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ n = 1,2,3,..., \tag{7}$$

$0 < \gamma < 1.$

Лемма 1. Приближения оптимального управления сходится в оптимальному управлению по норме гильбертова пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\left\| u^0(t) - u_n(t) \right\|_{H(0,T)} = \left\| \varphi\left[t, q^0(t), \beta\right] - \varphi\left[t, q_n(t), \beta\right] \right\|_{H(0,T)} \le$$

$$\le \varphi_0(\beta) \left\| q^0(t) - q_n(t) \right\|_{H(0,t)} \le \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \left\| G\left[h(t)\right] \right\|_{H(0,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ ,$$

так как функция $\varphi\left[t, q^0(t), \beta\right]$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$.

2. Приближения оптимального процесса и их сходимость

При построении приближения оптимального процесса влияние интегрального оператора Фредгольма оказадось существенным. В этом случае следует различать следующие виды приближений оптимального процесса:

1) $m-$ приближение оптимального процесса по "резольвенте":

$$V_m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda) z_n(x_0(\tau)) f\left[(\tau, u^0(\tau)\right] d\tau \right\} z_n(x),$$

где

$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} k_{n,i}(t,s)\ ;\ \varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} ds, 0 \le \tau \le t \\ \lambda \int_\tau^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds, t \le \tau \le T \end{cases}$$

2) $m,k-$ приближение оптимального процесса, построенное с учетом прближения оптимального управления:

$$V_m^k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda) z_n(x_0(\tau)) f\left[(\tau, u_k(\tau)\right] d\tau \right\} z_n(x);$$

3) $m,k,r-$ конечномерное приближение оптимального процесса

$$V_m^{k,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r} \left\{ \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \int_0^T \varepsilon_n^m(T,\tau,\lambda) z_n(x_0(\tau)) f\left[(\tau, u_k(\tau)\right] d\tau \right\} z_n(x).$$

Теперь исследуем их сходимость.

2.1. Сходимость приближения по "резольвенте"

Лемма 2. Приближения оптимального процесса по резольвенте сходится к оптимальному процессу по норме гильбертова пространства $H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\left\| V^0(t,x) - V_m^o(t,x) \right\|_{H(Q)}^2 = \int_0^T \int_0^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{1n} \left[e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] + \right.$$

$$+ \int_0^T \varepsilon_n(t,\tau,\lambda) z_n(x_0) f\left[(\tau, u(\tau)\right] d\tau) z_n(x) -$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{1n} \left[e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n^m(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right] - \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda) z_n(x_0) f\left[(\tau, u(\tau)\right] d\tau) z_n(x) \right\}^2 dxdt\ =$$

$$=\int_0^T\int_0^1\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_{1n}\lambda\int_0^T(R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda))e^{-\lambda_n^2 s}ds+\int_0^T\left[\varepsilon_n(t,\tau,\lambda)-\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)\right]f\left[(\tau,u(\tau)\right]\cdot z_n(x)\right\}^2 dxdt\le$$

$$\le T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}(1-e^{-2\lambda_n^2T})\left\{\psi_n^2+2T\left\|f(t,u(t)\right\|^2_{H(0,t)}\right\}\cdot\frac{k_0}{2\lambda_n^2}(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\dfrac{k_0T}{2\lambda_n^2}}})^2\cdot(u\sqrt{\frac{k_0T}{2\lambda_n^2}})^{2m}\le$$

$$\le T\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}\left\{\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+2T\left\|f(t,u(t)\right\|^2_{H(0,t)}\right\}\frac{k_0}{2\lambda_n^2}(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\dfrac{k_0T}{2\lambda_n^2}}})^2(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{G})(|\lambda|\sqrt{\frac{k_0T}{2\lambda_1}})^{2m};$$

и соотношения

$$\left[V^0(t,x)-V_m^0(t,x)\right]_{H(Q)}\le C_1(|\lambda|\sqrt{\frac{k_0T}{2\lambda_1^2}})^m\xrightarrow[m\to\infty]{}0\text{, т.к. }|\lambda|\sqrt{\frac{k_0T}{2\lambda_1}}<1.$$

2.2. Сходимость $m,k-$ приближения оптимального процесса

Лемма 3. $m,k-$ приближение оптимального процесса сходится по норме $H(Q)$.

Доказательство. Учитывая, что функция $f(t,u(t))$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной $u(t)$, непосредственным вычислениям получено соотношение:

$$\left\|V_m^0(t,x)-V_m^k(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)z_n(x_0)\left[f((\tau,u^0(\tau)-f(\tau,u_k(\tau))\right]d\tau z_n(x)\right\}^2d\tau dx\le$$

$$\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}(\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)z_n(x_0)\left\{f\left[f(\tau,u^0(\tau)\right]-f\left[\tau,u_k(\tau)\right]\right\}d\tau)^2dt\le$$

$$\le T(1+\frac{\lambda^2k_0T}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{(k_0T)^2}})\cdot(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})f_0^2\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|^2_{H(0,t)}\le$$

$$\le C_2^2f_0^2\varphi_0^2(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[h(t)\right]\right\|^2_{H(0,t)}\xrightarrow[k\to\infty]{}0;\quad\forall m=1,2,3,...$$

из которого следует утверждение леммы.

2.3. Сходимость конечномерного оптимального процесса

Лемма 4. Конечномерное приближение оптимального процесса сходится к $m,k-$ приближению оптимального процесса по норме гильбертова пространства $H(Q)$**.**

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения:

$$\left\|V_m^k(t,x)-V_m^{k,r}(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2t}+\lambda\int_0^TR_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right]+$$

$$+\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)z_n(x_0)f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]d\tau)z_n(x)-$$

$$-\sum_{n=1}^{r}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2t}+\lambda\int_0^TR_n^m(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right]+\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\lambda)f\left[(\tau,u_k(\tau)\right]dx\right\}z_n(x))^2d\tau dt\le$$

$$\le2(1+\frac{\lambda^2k_0T}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{(k_0T)^2}})(\left\|\psi(x)\right\|^2_{H(0,1)}+2\left\|f(\tau,u_k(\tau)\right\|^2_{H(0,T)}\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\le$$

$$\le C_3\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=C_3\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(n-1)^2}=\frac{C_3}{\pi^2}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{C_3}{\pi^2}\left[\frac{1}{r^2}+\int_r^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right]=$$

$$= \frac{C_3}{\pi^2}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{x}\Big|_r^\infty\right] == \frac{C_3}{\pi^2}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right] = \frac{C_3}{\pi^2}\cdot\frac{r+1}{r^2} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \text{ при любых } m,k = 1,2,3,\dots,$$

где C_3 – известная постоянная .

2.4. Сходимость конечномерного приближения к оптимальному процессу

Лемма 5. Конечномерные приближения сходятся к оптимальному процессу по норме гильбертова пространства $H(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left\|V^0(t,x) - V_m^{k,r}(t,x)\right\|_{H(Q)} \le$$

$$\le \left\|V^0(t,x) - V_m(t,x)\right\|_H + \left\|V_m(t,x) - V_m^k(t,x)\right\|_H + \left\|V_m^k(t,x) - V_m^{k,r}(t,x)\right\| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0,$$

которое имеет место согласно лемм 2–4.

3. Приближения минимального значения функционала и их сходимость

Для минимального значения функционала в соответствии с приближениями оптимального процесса будем различать следующие виды его приближений:

1) $m-$ приближение по “резольвенте” минимального значения функционала:

$$J_m\left[u^0(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt,\ \beta > 0;$$

2) $m,k-$ приближение минимального значения функционала:

$$J_m\left[u_k(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m^k(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \beta > 0;$$

3) $m,k,r-$ приближение минимального значения функционала:

$$J_m^r\left[u_k(t)\right] = \int_0^1 \left[V_m^{k,r}(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt,\ \beta > 0.$$

Теперь исследуем их сходимость.

3.1. Сходимость $m-$ го приближения по “резольвенте”

Лемма 6. $m-$ приближение функционала по резольвенте сходится к минимальному значению функционала.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения:

$$\left|J(u^0) - J_m(u^0)\right| = \left|\int_0^1 \left[V^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt - \int_0^1 \left[V_m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx - \beta\int_0^T p^2\left[t,u^0(t)\right]dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^1 \left[V^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 - \left[V_m(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx\right| \le$$

$$\le \left\|V^0(T,x) + V_m^0(T,x) - 2\xi(x)\right\|_{H(0,1)} \cdot \left\|V^0(T,x) - V_m^0(T,x)\right\|_{H(0,t)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0,$$

которое имеет место в силу леммы 2.

3.2. Сходимость $m,k-$ приближения

Лемма 7. $m,k-$ приближение минимального значения функционала сходится с $m-$ приближением.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения:

$$\left|J_m(u^0) - J_m(u_k)\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 (V_m(T,x) + V_m^k(T,x) - 2\xi(x))(V_m(T,x) - V_m^k(T,x))dx + \beta\int_0^T p(t,u^0(t)) + p(t,u_k(t))(p(t,u^0(t)) - p(t,u_k(t))dt\right| \le$$

$$\le \left\|V_m^0(T,x) + V_m^k(T,x) - 2\xi(x)\right\|_{H(0,1)} \left\|V_m^0(T,x) - V_m^k(T,x)\right\| + \beta\left\|p(t,u^0(t)) + p(t,u_k(t))\right\|_{H(0,t)}.$$

$$\cdot\left\|p(t,u^0(t))-p(t,u_k(t))\right\|_{H(0,T)}\leq\left\|V_m^0(T,x)+V_m^k(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\cdot C_2 f_0\varphi_0(\beta)\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,t)}+$$

$$+\beta\left\|p(t,u^0(t))+p(t,u_k(t)\right\|\cdot\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_{H(0,T)}\xrightarrow[k\to\infty]{\forall m}0,$$

которое имеет место в силу леммы 1.

3.3. Сходимость m,k,r-го приближения

Лемма 8. $m,k,r-$ приближение минимального значения функционала сходится к m,k-му приближению .

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения:

$$\left|J_m(u_k)-J_m^r(u_k)\right|=\left|\int_0^1\left[V_m^k(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left[V_m^{k,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx-\beta\int_0^T p^2\left[t,u_k(t)\right]dt\right|\leq$$

$$\leq\left\|V_m^k(T,x)+V_m^{k,r}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|V_m^k(T,x)-V_m^{k,r}(T,x)\right\|_{H(0,1)}\leq$$

$$\leq\left\|V_m^k(T,x)+V_m^{k,r}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\left\|V_m^k(T,x)-V_m^{k,r}(T,x)\right\|_{H(0,1)}\leq$$

$$\leq\left\|V_m^k(T,x)+V_m^{k,r}(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H(0,1)}\overline{C_3}\,\frac{1}{\pi^2}\,\frac{r+1}{\underline{r^2}}\xrightarrow[r\to\infty]{\forall m,k}0\,,$$

которое имеет место согласно леммы 4, где $\overline{C_3}$ – известная постоянная.

3.4. Сходимость конечномерного приближения

Лемма 9. Конечномерные приближения сходятся к минимальному значению функционала.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения:

$$\left|J(u^0)-J_m^r\left[u_k\right]\right|\leq\left|J(u^0)-J_m(u^0)\right|+\left|J_m(u^0)-J_m(u_k)\right|+\left|J_m(u_k)-J_m^r(u_k)\right|\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{}0,$$

которое следует согласно лемм 6–8.

Литература

1. *Kerimbekov A.K.* Optimal distributed control for the processes of oscillation described by fredholm integro-differential equations / A.K. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva // Eurasian mathematical journal. 2015. Vol. 6. № 2. P. 28–40.
2. *Kerimbekov A.* On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls / A. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva, R. Nametkulova A. Kadirimbetova // Applied Mathematics & Information Sciences. An International Journal. 2016. Vol. 10. No. 1. P. 215–223.
3. *Kerimbekov A.* On the Solvability of a Nonlinear Tracking Problem Under Boundary Control for the Elastic Oscillations Described by Fredholm Integro-Differential Equations / A. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva. 2015. Springer, 312, 322 p.
4. *Керимбеков А.* Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. 2017. Т. 17. № 5. С. 45–50.
5. *Эрмекбаева А.Т.* Подвижное оптимальное точечное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. 2017. Т. 17. № 1. С. 71–75.