УДК 622:531

УРАВНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ НА БАЗЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

А.А. Мясников

Приводится вывод уравнения упругих продольных колебаний на базе теоремы об изменении количества движения.

Ключевые слова: стержень; продольные колебания.

Различные физические процессы, в том числе и колебательные, могут характеризоваться некоторыми интегральными соотношениями. При выводе уравнения можно исходить из такого интегрального соотношения уравнения баланса, выражающего теорему для конечного объема. Соответствующие дифференциальные уравнения получаются из уравнения баланса при стягивании объема к нулю, в предположении существования непрерывных необходимых производных.

Уравнения, построенные по этому принципу, наиболее обоснованно применять для численного анализа задач, когда вынужденно осуществляется переход от непрерывной среды, моделируемой бесконечно малыми элементами, к дискретным моделям, моделируемым конечными, достаточно большими, элементами. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные физические свойства процесса сохранялись. Такими свойствами, прежде всего, являются теоремы об изменениях и законы сохранения.

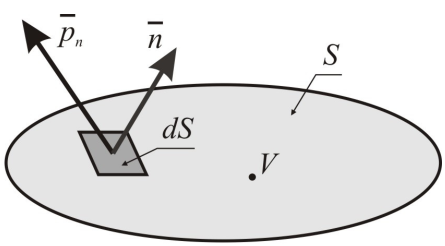

Рисунок 1 – К теореме об изменении количества движения для сплошной среды

Одним из наиболее перспективных численных алгоритмов анализа динамических задач является метод конечных разностей, по которому уравнения заменяются разностной схемой. Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называются консервативными, или дивергентными. Законы сохранения для всей сеточной области (“интегральные” законы сохранения) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием соответствующих разностных уравнений. Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнения баланса, записанного для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Это требует представления основного уравнения в специальной форме, обычно интегро-дифференциальной. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные заменяются приближенными разностными выражениями, в результате чего получаются однородные разностные схемы. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем называется интегро-интерполяционным методом (методом баланса). Следует ожидать, что разностные схемы, полученные таким образом, будут более точными и, в некоторой степени, “самокорректирующимися”.

Теорема об изменении количества движения для сплошной среды. В сплошном теле выделяется конечный объем V, ограниченный поверхностью S (рисунок 1).

Внешние силы, действующие на объем V и поверхность S со стороны остальных частей системы, а также и других внешних тел, разделяются на две группы:

1. Силы массовые или объемные, т. е. такие, которые действуют на все частицы объема V как внутренние, так и находящиеся на поверхности выделенного объема.

2. Силы поверхностные, действующие только на частицы, лежащие на внешней поверхности S выделенного элемента.

Главный вектор внешних объемных сил обозначается через $\overline{P}_V$, внешних поверхностных сил через $\overline{P}_S$. Если количество движения выделенного элемента в данный момент времени равно $\overline{Q}$, то теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме записывается в виде

$$\frac{d\overline{Q}}{d\tau} = \overline{P}_V + \overline{P}_S, \qquad (1)$$

где τ – время.

Для описания движения сплошной среды приходится переходить от сосредоточенных в отдельных точках среды значений физических величин к их непрерывным распределениям и количественно характеризовать эти распределения плотностью распределения физической величины.

Плотность распределения объемных сил обозначается через $\overline{p}_V$, тогда главный вектор объемных сил определится формулой

$$\overline{P}_V = \int\limits_{(V)} \overline{p}_V \, dV. \qquad (2)$$

Ориентация элементарной площадки на поверхности dS определяется единичным вектором нормали $\overline{n}$ к поверхности (см. рисунок 1). Поскольку площадка имеет две стороны, то для определенности принимается, что вектор нормали направлен наружу по отношению к выделенному объему. Поверхностные силы представляют собой напряжение $\overline{p}_n$, приложенное к внешней стороне элементарной площадки dS, ориентация которой определяется вектором нормали $\overline{n}$. Главный вектор поверхностных сил $\overline{P}_S$ определится формулой

$$\overline{P}_s = \int\limits_{(S)} \overline{p}_n \, dS. \qquad (3)$$

Количество движения элементарного объема dV определится выражением

$$d\,\overline{q} = \rho \, dV \, \overline{v}, \qquad (4)$$

где ρ – плотность материала; $\overline{v}$ – вектор скорости элементарного объема.

Количество движения всего выделенного элемента выразится формулой

$$\overline{Q} = \int\limits_{(V)} d\,\overline{q}, \; \overline{Q} = \int\limits_{(V)} \rho \, \overline{v} \, dV. \qquad (5)$$

Таким образом, теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме для элемента сплошной среды определяется соотношением

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{(V)} \rho \, \overline{v} \, dV = \int\limits_{(V)} \overline{p}_V \, dV + \int\limits_{(S)} \overline{p}_n \, dS. \qquad (6)$$

Вывод уравнения. Предполагается, что стержни тонкие и выполняются гипотезы одномерной теории продольных колебаний стержней Сен-Венана:

- плоские поперечные сечения прямого однородного стержня остаются плоскими в процессе динамического растяжения – сжатия;
- относительные деформации остаются в пределах упругости;
- материал стержня подчиняется закону Гука.

Ось координат поперечных сечений x параллельна оси стержня. Выделяется элемент стержня, ограниченный боковой поверхностью и плоскими поперечными сечениями с координатами x_1 и x_2, длиной $l = \left| x_2 - x_1 \right|$ (рисунок 2).

Движение является в данной системе координат одномерным, вдоль оси x, следовательно, основная теорема об изменении количества движения (6) эквивалентна для данной задачи своей проекции на ось поперечных сечений x:

$$\frac{dQ_x}{d\tau} = P_{Vx} + P_{Sx}. \qquad (7)$$

Поскольку силами веса в теории Сен-Венана пренебрегается, то активные объемные силы будут отсутствовать, т. е. главный вектор объемных сил будет равен нулю:

$$\overline{P}_V \equiv 0, \; P_{Vx} \equiv 0. \qquad (8)$$

Боковая поверхность стержня свободна, следовательно, там не возникает поверхностных напряжений. Отличными от нуля будут нормальные напряжения, перпендикулярные плоским поперечным граничным сечениям выделенного элемента, определяемые действием отброшенных частей стержня. Так как деформации предполагаются упругими, то напряжения определяются законом Гука:

$$\sigma\left(x_1,\tau\right) = E\,\varepsilon\left(x_1,\tau\right) = E\,\frac{\partial u\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}; \qquad (9)$$

$$\sigma\left(x_2,\tau\right) = E\,\varepsilon\left(x_2,\tau\right) = E\,\frac{\partial u\left(x_2,\tau\right)}{\partial x}, \qquad (10)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $u\,(x,\,\tau)$ – смещение сечения с координатой x в момент времени τ.

Величины равнодействующих сил в торцах выделенного элемента

$$P\left(x_1,\tau\right) = E\,s\left(x_1\right)\frac{\partial u\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}, \qquad (11)$$

$$P\left(x_2,\tau\right)=E\,s\left(x_2\right)\frac{\partial u\left(x_2,\tau\right)}{\partial x}. \qquad (12)$$

При предположении, что $x_1 > x_2$ и учитывая совпадение направления силы $P\,(x_2,\,\tau)$ с направлением внешней нормали к торцу с координатой x_2, противоположные направления аналогичных векторов на торце с координатой x_1, проекция равнодействующей поверхностных сил определится формулой

$$P_{Sx}=E\,s\left(x_2\right)\frac{\partial u\left(x_2,\tau\right)}{\partial x}-E\,s\left(x_1\right)\frac{\partial u\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}. \qquad (13)$$

Количество движения выделенного элемента определится интегралом

$$Q_x=\int_{x_1}^{x_2}\rho\,s\left(x\right)v\left(x,\tau\right)dx,$$

$$Q_x=\int_{x_1}^{x_2}\rho\,s\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,\tau\right)}{\partial \tau}dx_x. \qquad (14)$$

С учетом независимости от времени τ плотности материала ρ и функции площади поперечных сечений $s\,(x)$, производная по времени от количества движения выделенного элемента вдоль оси x определится выражением

$$\frac{dQ_x}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\int_{x_1}^{x_2}\rho\,s\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,\tau\right)}{\partial \tau}dx,$$

$$\frac{dQ_x}{d\tau}=\int_{x_1}^{x_2}\rho\,s\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,\tau\right)}{\partial \tau^2}dx. \qquad (15)$$

При подстановке полученного выражения в соотношение, определяемое теоремой (6), получается уравнение продольных колебаний тонких стержней в интегрально-дифференциальной (балансовой) форме:

$$E\,s\left(x_2\right)\frac{\partial u\left(x_2,\tau\right)}{\partial x}-E\,s\left(x_1\right)\frac{\partial u\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\rho\,s\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,\tau\right)}{\partial \tau^2}dx. \qquad (16)$$

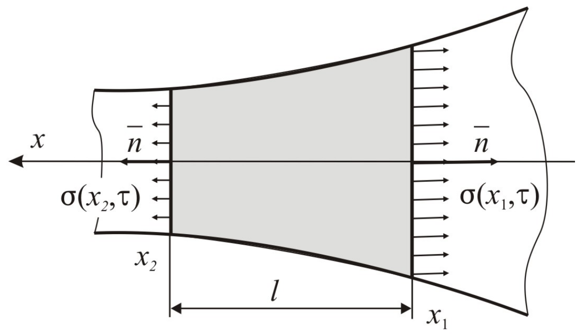

Рисунок 2 – К выводу уравнения продольных колебаний тонких стержней на базе теоремы об изменении количества движения

В случае однородности материала стержня, рационально вводить переменную:

$$t=c\,\tau, \qquad (17)$$

где $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, (18)

с учетом которой уравнение (16) преобразуется к виду

$$s\left(x_2\right)\frac{\partial u\left(x_2,\tau\right)}{\partial x}-s\left(x_1\right)\frac{\partial u\left(x_1,\tau\right)}{\partial x}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}s\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,\tau\right)}{\partial t^2}dx. \qquad (19)$$

Если считать верхний предел переменным $x_1 = x_2$, тогда дифференцирование обеих частей (16) или (19) по верхнему пределу приводит к представлению уравнений продольных колебаний в стандартных дифференциальных формах в частных производных гиперболического типа при гипотезе плоских сечений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E\,s\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)-\rho\,s\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,\tau\right)}{\partial \tau^2}=0, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(s\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right)-s\left(x\right)\frac{\partial^2 u\left(x,\tau\right)}{\partial t^2}=0. \qquad (21)$$