

УДК 517.968

ОДИН КЛАСС СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА
С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

З.А. Каденова

Исследована единственность решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях, в которых оператор, порожденный ядрами, не является компактным оператором.

Ключевые слова: система линейных интегральных уравнений; единственность; регуляризация; функциональный анализ.

Постановка задачи. Актуальность проблемы обусловлена потребностями в разработке новых подходов для регуляризации и единственности решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными. В работе доказана теорема единственности решения интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях. Для этого использованы методы функционального анализа и метод неотрицательных квадратичных форм.

Рассмотрим уравнение

$$Ku \equiv \int_a^b K(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)dx + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dyds = f(t, x), (t, x) \in G,$$

$$G = \{(t, x) \in R^2, \quad t_0 \leq t < \infty, \quad a \leq x \leq b\}, \quad (1)$$

где

$$K(t, x, y) = \begin{cases} A(t, x, y), & (t, x, y) \in G_1, \\ B(t, x, y), & (t, x, y) \in G_2, \end{cases} \quad (2)$$

$A(t, x, y), B(t, x, y), H(t, x, s), C(t, x, s, y)$ – известные $n \times n$ -мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, a \leq y \leq x \leq b\}, \quad G_2 = \{(t, x, y): t_0 \leq t < \infty, a \leq x \leq y \leq b\},$$

$$G_3 = \{(t, x, s): t_0 \leq s \leq t < \infty, a \leq x \leq b\}, \quad G^2 = G \times G,$$

$f(t, x)$ – известная, $u(t, x)$ – неизвестная n -мерные вектор-функции.

В работах А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2, 3] и В.К. Иванова [4, 5], в которых дано новое понятие корректности постановки таких задач, отличное от классического, показано средство для исследования некорректных задач, что стимулировало интерес к интегральным уравнениям, имеющим большое прикладное значение. В настоящее время бурно развивается теория и приложения некорректных задач. Один из классов таких некорректных задач составляют интегральные уравнения первого рода с двумя независимыми переменными вида (1).

Введем следующие обозначения:

1. Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим M , $\langle ., . \rangle$ – скалярное произведение в R^n , $\|A\|, \|u\|$ – нормы соответственно $n \times n$ -мерной матрицы $A = (a_{ij}) \in M$ и n -мерного вектора u , т. е. для любых $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n) \in R^n$

$$\langle u, \mathcal{G} \rangle = u_1 \mathcal{G}_1 + u_2 \mathcal{G}_2 + \dots + u_n \mathcal{G}_n,$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{1/2};$$

2. $L_{2,n}(G)$ – пространство n -мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_{2,n}(G)$ – т. е. для любого $u(t, x) \in L_{2,n}(G)$:

$$\|u(t, x)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \|u(t, x)\|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}};$$

3. $L_2((G^2); M)$ – пространство $n \times n$ -мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма в $L_2((G^2); M)$, – т. е. для любого $A(t, x, s, y) \in L_2((G^2); M)$

$$\|A(t, x, s, y)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \|A(t, x, s, y)\|^2 dy dx ds dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что $\|C(t, x, s, y)\| \in L_2(G^2)$ и $C(t, x, s, y) = C^*(s, y, t, x)$, $(t, x, s, y) \in G^2$, где C^* – матрица, сопряженная с матрицей C . Тогда матричное ядро $C(t, x, s, y)$ разлагается в ряд, который сходится по норме в пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t, x, s, y) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(t, x) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(i)}(t, x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(s, y), \dots, \varphi_n^{(i)}(s, y) \end{pmatrix}, \quad l \leq m \leq \infty, \quad (3)$$

где $\{\varphi^{(i)}(t, x) = (\varphi_v^{(i)}(t, x))\}$ – ортонормированная последовательность собственных вектор-функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$ – последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора C , порожденного матричным ядром $C(t, x, s, y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей т. е.

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Обозначим

$$P(s, y, z) = A(s, y, z) + B^*(s, z, y), \quad (s, y, z) \in G_1, \quad (4)$$

где $B^*(s, z, y)$ – сопряженная матрица и матрице $B(s, z, y)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1. $P^*(s, y, z) = P(s, y, z)$, $(s, y, z) \in G_1$.

2. Матрицы $P(s, b, a)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0)$, $P'_z(s, b, z)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau)$ – неотрицательны соответственно при

всех значениях $s \in [t_0, \infty)$, $y \in [a, b]$, (s, z) , $(\tau, y) \in G$, $\|P(s, b, a)\| \in C[t_0, \infty)$, $\|\lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0)\| \in C[a, b]$, $\|P'_z(s, b, z)\| \in C(G)$, $\|\lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau)\| \in C(G)$.

3. Матрицы $P'_y(s, y, a)$, $H'_s(s, y, t_0)$, $P''_{zy}(s, y, z)$, $H''_{\tau\tau}(s, y, \tau)$ – неположительны при всех значениях соответственно $(s, y) \in G$, $(s, y, z) \in G_1$, $(s, y, \tau) \in G_3$, $\|P'_y(s, y, a)\| \in C(G)$, $\|H'_s(s, y, t_0)\| \in C(G)$, $\|P''_{zy}(s, y, z)\| \in C(G_1)$, $\|H''_{\tau\tau}(s, y, \tau)\| \in C(G_3)$.

4. Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s, y) \in G$ матрица $P'_y(s, y, a)$ – отрицательны;

б) при почти всех $(s, z) \in G$ матрица $P'_z(s, b, z)$ – положительны;

в) при почти всех $(s, y) \in G$ матрица $H'_s(s, y, t_0)$ – отрицательны;

г) при почти всех $(\tau, y) \in G$ матрица $\lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(\infty, y, \tau)$ – положительны и для любого $v(t, x) \in L_{2,n}(G)$,

$$\int_a^x A(t, x, y)v(t, y)dy, \int_x^b B(t, x, y)v(t, y)dy, \int_{t_0}^t H(t, x, s)v(s, x)ds \in L_{2,n}(G), \text{ где } C[t_0, \infty), C(G), C(G_1) \text{ и } C(G_3) \text{ – про-}$$

странство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0, \infty)$, G , G_1 и G_3 .

Теоремы. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t, x, y)u(t, y)dy + \int_x^b B(t, x, y)u(t, y)dy + \int_{t_0}^t H(t, x, s)u(s, x)ds + \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(t, x, s, y)u(s, y)dyds = f(t, x), \quad (t, x) \in G. \quad (5)$$

Обе части (5), скалярно умножим на $u(t, x)$ и интегрируем по области G :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^y A(s, y, z)u(s, z)dz, u(s, y) \right\rangle dsdy + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_y^b B(s, y, z)u(s, z)dz, u(s, y) \right\rangle dsdy + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^s H(s, y, \tau)u(\tau, y)d\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)dzd\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(s, y), u(s, y) \rangle dsdy. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя формулу Дирихле из (6), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^y A(s, y, z)u(s, z)dz, u(s, y) \right\rangle dsdy + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^z B(s, y, z)u(s, y)dy, u(s, z) \right\rangle dsdz + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^t H(s, y, \tau)u(\tau, y)d\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^{\infty} \int_a^b C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)dzd\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(s, y), u(s, y) \rangle dsdy. \\ & \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^y [A(s, y, z) + B^*(s, z, y)]u(s, z)dz, u(s, y) \right\rangle dyds + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^s H(s, y, \tau)u(\tau, y)d\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)dzd\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(s, y), u(s, y) \rangle dsdy. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая обозначения (4), получим:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_a^y P(s, y, z)u(s, z)dz, u(s, y) \right\rangle dyds + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^s H(s, y, \tau)u(\tau, y)d\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy + \\ & + \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b C(s, y, \tau, z)u(\tau, z)dzd\tau, u(s, y) \right\rangle dsdy = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(s, y), u(s, y) \rangle dsdy. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (7). Известно что, если K – самосопряженная матричная функция размеров $n \times n$, то

$$\langle K\vartheta, \vartheta'_s \rangle = \frac{1}{2} (\langle K\vartheta, \vartheta \rangle)'_s - \frac{1}{2} \langle K'_s \vartheta, \vartheta \rangle, \quad (8)$$

где ϑ – некоторый n мерный вектор-функция.

Далее, имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi = -u(\tau, y),$$

с помощью интегрирования по частям и с учетом (8) первый слагаемый левой части (7) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle \int_a^y P(s, y, z) u(s, z) dz, u(s, y) \right\rangle dy ds = - \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle \int_a^y P(s, y, z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_a^y u(s, v) dv \right) dz, u(s, y) \right\rangle dy ds = \\ & = - \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P(s, y, z) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right) \right\rangle_a^y \left[- \int_a^y P'_z(s, y, z) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right) dz, u(s, y) \right] dy ds = \\ & = \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle \left(P(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv + \int_a^y P'_z(s, y, z) \int_a^y u(s, v) dv \right) dz, u(s, y) \right\rangle dy ds = \\ & = \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle \left(P(s, y, a) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right), \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)' \right) + \left(P'_z(s, y, z) \left(\int_a^y u(s, v) dv \right), \left(\int_a^y u(s, v) dv \right)' \right) \right\rangle dy ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle \left[\left(\left(P(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right) \right)' - \frac{1}{2} \left(P'_y(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_a^y \left[\left(\left(P'_z(s, y, z) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right) \right)' - \frac{1}{2} \left(P''_{zy}(s, y, z) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right) \right] dz \right\rangle dy ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\langle P(s, b, a) \int_a^b u(s, v) dv, \int_a^b u(s, v) dv \right\rangle ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P'_y(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right\rangle dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P'_z(s, b, z) \int_a^b u(s, v) dv, \int_a^b u(s, v) dv \right\rangle dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^y \left\langle P''_{zy}(s, y, z) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right\rangle dz dy ds. \quad (9) \end{aligned}$$

Аналогично, для второго слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \int_{t_0}^s H(s, y, \tau) u(\tau, y) d\tau, u(s, y) \right\rangle ds dy = \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0) \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle H'_s(s, y, t_0) \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle ds dy + \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau) \int_{\tau}^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_{\tau}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau dy - \\ & - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^s \left\langle H''_{\tau s}(s, y, \tau) \int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi, \int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau ds dy. \quad (10) \end{aligned}$$

Подставляя (3), (9), (10) в (7), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left\langle P(s, b, a) \int_a^b u(s, v) dv, \int_a^b u(s, v) dv \right\rangle ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P'_y(s, y, a) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right\rangle dy ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle P'_z(s, b, z) \int_a^b u(s, v) dv, \int_a^b u(s, v) dv \right\rangle dz ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \int_a^y \left\langle P''_{zy}(s, y, z) \int_a^y u(s, v) dv, \int_a^y u(s, v) dv \right\rangle dz dy ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \int_a^b \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y, t_0) \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle H'_s(s, y, t_0) \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi, \int_{t_0}^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle ds dy + \\
 & + \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} H'_\tau(t, y, \tau) \int_{\tau}^{\infty} u(\xi, y) d\xi, \int_{\tau}^{\infty} u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau dy - \frac{1}{2} \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \int_{\tau}^s \left\langle H''_{\tau s}(s, y, \tau) \int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi, \int_{\tau}^s u(\xi, y) d\xi \right\rangle d\tau ds dy + \\
 & + \sum_{i=1}^m \lambda_i \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle \varphi^{(i)}(s, y), u(s, y) \right\rangle^2 ds dy = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \langle f(s, y), u(s, y) \rangle ds dy. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Пусть $f(t, x) = 0$, $(t, x) \in G$.

Тогда, учитывая условия 1), 2), 3), 4) и 5), из (11) имеем $u(t, x) = 0$ при всех $(t, x) \in G$. Теорема доказана.

Литература

1. Тихонов А.Н. О методах решения некорректно поставленных задач / А.Н. Тихонов // Тез. докл. межд. конгр. математиков. М., 1966.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
3. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. М.: Наука, 1980.
4. Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах / В.К. Иванов // Дифференциальные уравнения. 1968. № 2. С. 61.
5. Иванов В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. М.: Наука, 1978.