

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ФРЕДГОЛЬМОВО
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ**

Р.Ж. Наметкулова

Проведено исследование задачи нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение; приближенное решение; сходимость.

1. Постановка задачи оптимизации и нелинейное интегральное уравнение оптимального управления.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал [1–4]

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи:

$$v_t = v_{xx} + \lambda \int_0^T K(t, \tau) v(\tau, x) d\tau + g(t, x) f[t, u(t)], \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$v(0, x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$v_x(t, 0) = 0, \quad v_x(t, 1) + \alpha v(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Здесь функция $v(t, x)$, $(t, x) \in Q = \{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ описывает состояния управляемого процесса, ядро $K(t, \tau)$ – известная функция, определенная в квадрате $A = \{0 < t < T, 0 < \tau \leq T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\iint_{00}^{TT} K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty; \quad (5)$$

$g(t, x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0, 1)$, $f[t, u(t)] \in H(0, T)$ – заданные функции, причем функция $f[t, u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0, T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т. е.

$$\frac{\partial f[t, u(t)]}{\partial u} \neq 0, \forall t \in [0, T]; \quad (6)$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y .

Управление $u^0(t) \in H(0, T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t, x)$ краевой задачи (2)–(4) минимизирует функционал (1), называется оптимальным, а $v^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Решение краевой задачи определяется по формуле

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x),$$

где $v_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения [3, 5].

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t, s) v_n(s) ds + a_n(t) \quad (7)$$

с ядром

$$K_n(t, s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau, s) d\tau \quad (8)$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau. \quad (9)$$

Коэффициенты Фурье $v_n(t)$ определяются по формуле [6]

$$v_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (10)$$

где резольвента $R_n(t, s, \lambda)$ ядра $K_n(t, s)$ имеет вид

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad K_{n,i+1}(t, s) = \int_0^T K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

и при выполнении условия

$$|\lambda| \sqrt{K_0 T} < \sqrt{2} \lambda_1, \quad (12)$$

является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2 - |\lambda| \sqrt{K_0 T}}} \left(\int_0^T K^2(\eta, s) d\eta \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t, u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \int_0^T \tilde{G}_n(s, \lambda) f[s, u(s)] ds = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t) h_n, \quad (14)$$

где

$$\tilde{G}_n(t, \lambda) = g_n(t) \left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T R_n(\tau, t, \lambda) e^{-\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \right], \quad (15)$$

$$G_n(t, \lambda) = g_n(t) \left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_t^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2(\tau-t)} d\tau \right], \quad (16)$$

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T, \tau, \lambda) e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau \right], \quad (17)$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u[t, u(t)] \left(\frac{u(t)}{f_u[t, u(t)]} \right)_u > 0. \quad (18)$$

Это условие ограничивает класс функций внешних воздействий $f[t, u(t)]$. Поэтому будем считать, что функция $f[t, u(t)]$ удовлетворяет условию (18) для любого управления $u(t) \in H(0, T)$.

Оптимальное управление имеет структуру [7]

$$u^0(t) = \varphi[t, p^0(t), \beta], \tag{19}$$

где $u^0(t)$ является единственным решением нелинейного интегрального уравнения

$$p(t) = G[p(t)] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t, \lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds \right]. \tag{20}$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$ определяется по формуле

$$v^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds - a_n(t) \right) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \right) e^{-\lambda_n^2 t} ds + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u^0(\tau)] d\tau + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\eta)} g_n(\eta) f[\eta, u^0(\eta)] d\eta ds \right] z_n(x), \tag{21}$$

а минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^0(T, x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T \left[u^0(t) \right]^2 dt. \tag{22}$$

Тройка $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ определяет решения задачи нелинейной оптимизации.

II. Приближенное решение задачи оптимизации.

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (20). Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $p_k(t)$ уравнения (20), где число k определяется из неравенства [8]

$$\| \bar{p}(t) - p_k(t) \|_H \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_H < \varepsilon \tag{23}$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Согласно структуре оптимального управления k -е приближение находим по формуле

$$u_k(t) = \varphi[t, p_k(t), \beta]. \tag{24}$$

Лемма 2.1. Пусть функция $\varphi[t, \mathcal{G}_k(t), \beta]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной $\mathcal{G}(t)$, т. е.

$$\| \varphi[t, \mathcal{G}_1(t), \beta] - \varphi[t, \mathcal{G}_2(t), \beta] \|_H \leq \varphi_0(\beta) \| \mathcal{G}_1(t) - \mathcal{G}_2(t) \|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \tag{25}$$

Тогда k -е приближенное управление сходится к оптимальному управлению $u(t)$ по норме гильбертова пространства H .

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\begin{aligned} \| u^0(t) - u_k(t) \|_H &= \| \varphi[t, p^0(t), \beta] - \varphi[t, p_k(t), \beta] \|_H \leq \\ &\leq \varphi_0(\beta) \| p^0(t) - p_k(t) \|_H \leq \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \| G[p_0(t)] - p_0(t) \| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Лемма 2.2. Пусть функция $f[t, u(t)]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональной переменной $u(t)$, т. е.

$$\| f[t, u_1(t)] - f[t, u_2(t)] \|_H \leq f_0 \| u_1(t) - u_2(t) \|_H \tag{27}$$

и выполнено (25). Тогда m, k -е приближение $v_n^m(t, x)$ решения краевой задачи (2)–(4) сходится к точному решению $v(t, x)$ по норме гильбертова пространства $H(Q)$.

Доказательство. Приближения оптимального процесса $v^0(t, x)$ определяются двумя индексами k и m и имеют вид

$$v_n^m(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u_k(\tau)] d\tau + \lambda \int_0^T g_n(\tau) \int_{\tau}^T R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds f[\tau, u_k(\tau)] d\tau \right\} z_n(x). \tag{28}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} v^0(t, x) - v_k^m(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \psi_n \lambda \int_0^T [R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)] e^{-\lambda_n^2 s} ds + \int_0^T e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) [f(\tau, u^0(\tau)) - f(\tau, u_k(\tau))] d\tau + \right. \\ &+ \lambda \int_0^T g_n(\tau) \int_{\tau}^T [R_n(t, s, \lambda) - R_n^m(t, s, \lambda)] e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds f[\tau, u^0(\tau)] d\tau + \lambda \int_0^T g_n(\tau) \int_{\tau}^T R_n^m(t, s, \lambda) e^{-\lambda_n^2(s-\tau)} ds [f(\tau, u^0(\tau)) - f(\tau, u_k(\tau))] d\tau \left. \right\} z_n(x), \end{aligned}$$

то с учетом вычислений, использованных при доказательстве сходимости приближенного решения краевой задачи (2)–(4), получим соотношение

$$\|v^0(t, x) - v_k^m(t, x)\|_H^2 \leq C_1(\lambda) \left(|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}} \right)^{2m} + C_2(\lambda) \left(\frac{\gamma^k}{1-\gamma} \right)^2 \xrightarrow{m, k \rightarrow \infty} 0,$$

где

$$C_1(\lambda) = \left(\| \psi(x) \|_H^2 + T \| g(t, x) \|_H^2 \right) \frac{\lambda^2 K_0 T}{4} \left(1 - \frac{1}{\ln |\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}}} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^4} + \frac{1}{\pi^4} \cdot \frac{4}{3} \right),$$

$$C_2(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \| g(t, x) \|_H^2 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \| G[p_0(t)] - p_0(t) \|_H^2,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2.3. m, k -е приближение $J_m[u_k(t)]$ минимального значения функционала $J[u^0(t)]$ сходится к точному значению.

Доказательство. Поскольку

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt, \quad J_m[u_k(t)] = \int_0^1 [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T [u_k^m(t)]^2 dt,$$

то нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned} |J[u^0(t)] - J_m[u_k(t)]| &= \int_0^1 \left\{ [v^0(T, x) - \xi(x)]^2 - [v_k^m(T, x) - \xi(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T \left\{ [u^0(t)]^2 - [u_k^m(t)]^2 \right\} dt \leq \\ &\leq \|v(T, x) + v_k^m(T, x) - 2\xi(x)\|_H \|v^0(T, x) + v_k^m(T, x)\|_H + \beta \|u^0(t) - u_k(t)\|_H \|u^0(t) - u_k(t)\|_H. \end{aligned}$$

Отсюда согласно лемме 2.1 и 2.2 и с учетом того, что

$$u^0(t) \in H(0, T), v(T, x) \in H(0, 1), \xi(x) \in H(0, 1), f[t, u(t)] \in H(0, T),$$

получим соотношение

$$\begin{aligned} |J[u^0(t)] - J_m[u_k(t)]| &\leq C_0(\lambda) \left[C_1(\lambda) \left(|\lambda| \sqrt{\frac{K_0 T}{2\lambda_1^2}} \right)^{2m} + C_2(\lambda) \left(\frac{\gamma^k}{1-\gamma} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \\ &+ h_0 \beta \varphi_0(\beta) \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \xrightarrow{m, k \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

где

$$C_0(\lambda) = 4 \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \left(\| \psi(x) \|_H^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \| g(t, x) \|_H^2 f[t, u(t)] \|_H^2 \right),$$

из которого следует утверждение леммы.

Таким образом, как следует из лемм 2.1–2.3 доказано, что приближенное решение $(u_k(t), v_k^m(t, x), J[u_k(t)])$ задачи нелинейной оптимизации сходится к точному решению $(u^0(t), v^0(t, x), J[u^0(t)])$ по управлению, по оптимальному процессу и по функционалу.

Литература

1. Верлань А.Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
2. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
3. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.

Р.Ж. Наметкулова

4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
6. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
8. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис... д-ра физ.-мат. наук. / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.