УДК 517.97 (575.2) (04)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.К. Керимбеков, Л.С. Красниченко

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда управление нелинейно входит в граничное условие.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация; оптимальное управление; тепловой процесс; граничное условие.

I. Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим управляемый тепловой процесс, описываемый функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в области Q =(0,1)×(0,T) уравнению теплопроводности [1],

$$V_t = V_{xx} + f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

а на границе области Q – начальному условию

$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in (0,1) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$V_x(t,0) = 0, V_x(t,1) + \alpha V(t,1) =$$
$$= p[t,u(t)], 0 < t < T,$$
$$V(0,x) = \psi(x), x \in (0,1), \tag{3}$$

где заданная функция $f(t,x) \in H(Q)$ описывает изменения постоянно действующего внешнего теплового потока, а функция $p[t,u(t)] \in H(0,T)$, нелинейно зависящая от функции управления $u(t) \in H(0,T)$, описывает изменения граничного теплового источника; $\psi(x) \in H(0,1)$ функция начального состояния управляемого процесса; постоянная α>0; T – фиксированный момент времени; H – пространство Гильберта.

Определение 1.1. Слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется любая функция $V(t,x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству [2]:

$$\int_0^1 \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)\Big|_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_1}\int_0^1 \Big[V(t,x)(\Phi(t,x) + \Phi(t,x)) + f(t,x)\Phi(t,x)\Big] \times$$
$$\times dxdt + \int_{t_1}^{t_2} p[t,u(t)]\Phi(t,1)dt$$

при произвольных моментов времени t_1 и t_2 $(0 \le t_1 \le t \le t_2 \le T)$ и для любой функции $\Phi(t,x) \in C^{1,2}[Q]$, а также начальному условию (2) в слабом смысле, т. е. соотношение

$$\lim_{t \to +0} \int_0^1 [V(t,x) - \psi(x)]\Phi_0(x)dx = 0$$

выполняется для любой функции $\Phi_0(x) \in H(0,1)$.

Используя методику работы [2], нетрудно показать, что функция

$$V(t,x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}(f_n(\tau) + z_n(1)p[\tau,u(\tau)]) \times \tag{4}$$
$$\times d\tau]z_n(x),$$

где ψ_n – коэффициент Фурье функции $\psi(x)$, $f_n(t)$ – функции *f(x,t)* ;

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2 + \alpha^2)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}} \cos \lambda_n x$$

решение краевой задачи

$$z(x) + \lambda^2 z(x) = 0, z'(0) = 0, z'(1) + \alpha z(1) = 0,$$

а λ_n корни трансцендентного уравнения $\lambda tg(\lambda) = \alpha$, удовлетворяющие условиям $(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), n = 1,2,3\ldots,$ является слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3). Заметим, что единственность решения краевой задачи (1)–(3) обеспечивается лишь при выполнении условия .

$$\frac{\partial p[t,u(t)]}{\partial u} \ne 0, \forall t \in [0,T]. \tag{5}$$

В этом случае каждое управление $u(t)$ определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (1)–(3).

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности

Управление $u(t) \in H(0,T)$, для которого краевая задача (1)–(3) имеет единственное слабо обобщенное решение $V(t,x) \in H(Q)$, назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где среди допустимых управлений $u(t) \in H(0,T)$, требуется найти такое управление $u^0(t) \in H(0,T)$, которое вместе соответствующим ему решением $V^0(t,x) \in H(Q)$ краевой задачи (1)–(3) минимизирует квадратичный интегральный функционал

$$I\left[u(t)\right] = \int_0^1 [V(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \beta > 0, \qquad (6)$$

где, $\xi(x) \in H(0,1)$ заданная функция.

Управление $u^0(t)$ называется оптимальным, а $V^0(t,x)$ оптимальным процессом.

Пусть $u^0(t)$ является оптимальным управлением, т. е. имеет место неравенство

$$\Delta I\left[u^0(t)\right] = I\left[u^0(t) + \Delta u(t)\right] - I[u^0(t)] \geq 0 ,$$

где $u^0(t) + \Delta u(t) \in H(0,T)$ при любом приращении $\Delta u(t) \in H(0,T)$. Согласно методике работы [3] нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\Delta I\left[u^0(t)\right] = -\int_0^T \Delta\Pi[t, \omega(t,x), u^0(t)] dt + \int_0^1 \Delta V^2(T,x) dx,$$

где $\Delta V(T,x)$ приращение функции $V(T,x)$ соответствующее приращению $\Delta u(t)$ управления $u(t)$; $\Delta\Pi[t,\omega(t,x),u^0(t)]$ – приращение функции

$$\Pi[t,\omega(t,x),u(t)] = p[t,u(t)]\omega(t,1) - \beta u^2(t); \qquad (7)$$

$\omega(t,x)$ – решение сопряженной краевой задачи.

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0, (t,x) \in Q,$$
$$\omega(T,x) + 2\left[V(T,x) - \xi(x)\right] = 0, x \in (0,1),$$
$$\omega_x(t,0) = 0, \omega_x(t,1) + \alpha\,\omega(t,1) = 0, 0 < t < T.$$

Согласно методике работы [2], легко доказать, что сопряженная краевая задача имеет единственное слабо обобщенное решение:

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \times \left[\int_0^T G_n(\tau,1) p\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau - h_n\right] z_n(x), \qquad (8)$$

где $G_n(t,1) = e^{(-\lambda_n^2(T-t))} z_n(1)$,

$$h_n = \xi_n - e^{-\lambda_n^2 T}\psi_n - \int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)} f_n(t) dt.$$

Поскольку область допустимых значений управления $u(t) \in H(0,T)$ является открытым множеством, то согласно методике работы [3] легко проверить, что решение задачи

$$\Pi\left[t, \omega(t,x), u(t)\right] \to \max, \quad u \in R, \quad t \in [0,T]$$

при фиксированных t и $\omega(t,x)$ определяется соотношениями

$$p_u\left[t, u(t)\right]\omega(t,1) - 2\beta u(t) = 0, \qquad (9)$$

$$p_u\left[t, u(t)\right] \bullet (u(t) p_u^{-1}\left[t, u(t)\right]) > 0, \qquad (10)$$

где $p_u^{-1}\left[t, u(t)\right]$ – обратная функция , которые называются условиями оптимальности. Таким образом оптимальное управление $u^0(t)$ следует искать среди функций $u(t)$, которые одновременно удовлетворяют условиям оптимальности (9) и (10).

III. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления и решение задачи нелинейной оптимизации

Оптимальное управление $u^0(t)$ находим согласно условиям оптимальности (9)–(10). Учитывая (5) и (8) равенство (9) перепишем в виде

$$\beta u(t) p_u^{-1} \times \left[t, u(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) p\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) h_n, \qquad (11)$$

т. е. оптимальное управление $u^0(t)$ должно удовлетворять нелинейному интегральному уравнению (11). Для исследования однозначной разрешимости уравнения (11) сначала его преобразуем. Согласно методике работы [4], положим

$$\beta u(t) p_u^{-1}\left[t, u(t)\right] = \theta(t). \qquad (12)$$

Это равенство, согласно (10), однозначно разрешается относительно $u(t)$, т. е. существует функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u(t) = \varphi[t, \theta(t), \beta] \qquad (13)$$

Согласно (12) и (13) уравнение (11) приводим к виду

$$\theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \int_0^T G_n(\tau,1) p\left[\tau, \varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]\right] d\tau = \qquad (14)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) h_n.$$

Теорема: Пусть функции $p\left[t, u(t)\right]$ и $\varphi[\tau, \theta(\tau), \beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной т. е.

$$\left\| p\left[t, u(t)\right] - p\left[t, \bar{u}(t)\right] \right\|_H \le$$
$$\le p_0 \left\| u(t) - \bar{u}(t) \right\|_H, \quad p_0 > 0,$$
$$\left\| \varphi[t, \theta(t), \beta] - \varphi[t, \bar{\theta}(t), \beta] \right\|_H \le$$
$$\le \varphi_0(\beta) \left\| \theta(t) - \bar{\theta}(t) \right\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0$$

и

$$\frac{\partial p[t, u(t)]}{\partial u} \ne 0, \forall t \in [0, T].$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = M_1 f_0 \varphi_0(\beta)\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right) < 1$$

уравнение (14) в пространстве *H(0,T)* имеет единственное решение $\tilde{\theta}(t) \in H(0,T)$.

Доказательство. Вводим оператор $G[\bullet]$, действующий по формуле

$$G[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,1) \times$$
$$\times \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau,1) p\left[\tau, \varphi\left[\tau, \theta(\tau), \beta\right]\right] d\tau \right],$$

и уравнение (14) перепишем в операторной форме

$$\theta = G[\theta]. \qquad (15)$$

Непосредственным вычислением доказывается, что оператор $G[\bullet]$ переводит любой элемент пространства *H(0,T)* снова в элемент этого же пространства, т. е. если

$\theta(t) \in H(0,T)$, то $G\left[\theta(t)\right] \in H(0,T)$. При выполнении условия $\gamma < 1$ оператор $G[\bullet]$ является сжимающим и на основе теоремы о сжимающем операторе [5] уравнение (15) в пространстве *H(0,T)* имеет единственное решение $\tilde{\theta}(t)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$\theta_n(t) = G\left[\theta_{n-1}(t)\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и удовлетворяет оценке

$$\left\| \tilde{\theta}(t) - \theta_n(t) \right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G_0[\theta_0(t) - \theta_0(t)] \right\|_H, \qquad (16)$$

где $\theta_0(t)$ произвольный элемент пространства *H(0,T)* .

Далее $\tilde{\theta}(t)$ подставляя в (13) получим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]. \qquad (17)$$

Оптимальное управление $u^0(t)$ подставляя в (4) находим оптимальный процесс

$$V^0(t,x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} (f_n(\tau) + z_n(1) p[\tau, u^0(\tau)]) \qquad (18)$$
$$d\tau] z_n(x).$$

Подставляя в (6), оптимальное управление $u^0(t)$ и оптимальный процесс, вычислим минимальное значение функционала $u^0(t)$, т. е.

$$I\left[u^0(t)\right] =$$
$$= \int_0^1 \left[V^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \qquad (19)$$
$$+ \beta \int_0^T [u^0(t)]^2 dt, \quad \beta > 0.$$

Таким образом, найденная тройка $(u^0(t),\ V^0(t,x),\ I[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

IV. Приближенное решение задачи оптимизации

Поскольку найти точное решение уравнения (15) не всегда удается, на практике ограничиваются нахождением приближенного решения, которое определяется с учетом заданной точности. В зависимости от требуемой точности число n определяется, согласно оценке (16).

Подставляя в (17) вместо $\theta(t)$,k-е приближенное решение $\theta_k(t)$ уравнения (15), находим k-е приближение оптимального управления

$$u_k(t) = \varphi[t, \theta_k(t), \beta]. \qquad (20)$$

При этом допускаемая погрешность оценивается неравенством

$$\|u^0(t) - u_k(t)\|_H =$$
$$= \|\phi[t, \theta(t), \beta] - \phi[t, \theta_k(t), \beta]\| \leq$$
$$\leq \phi_0(\beta)\|\theta(t) - \theta_k(t)\|_H \leq$$
$$\leq \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\|G_0[\theta_0(t)] + \hbar(t) - \theta_0(t)\|_H.$$

Подставляя в (4), построенное k-е приближение оптимального управления, , находим k-е приближение оптимального процесса:

$$V_k(t,x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}(f_n(\tau) + z_n(1)p[\tau, u_k(\tau)])d\tau] \times \quad (22)$$
$$\times z_n(x).$$

Согласно (18) и (22) непосредственным вычислениям, находим, что допускаемая погрешность оценивается неравенством:

$$\|V(t,x) - V_k(t,x)\|_H \leq \left[TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right]^{1/2} \times$$
$$\times P_0\phi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\|G_0[\theta_0(t) + \hbar(t) - \theta_0(t)]\|_H. \quad (23)$$

Подставляя в (19), приближенное управление $u_k(t)$ и приближенный оптимальный процесс $V_k(t,x)$, вычислим k-е приближение минимального значения функционала $I[u_k(t)]$ по формуле

$$I[u_k(t)] =$$
$$= \int_0^1 [V_k(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta\int_0^T u_k^2(t)dt. \quad (24)$$

Согласно (19) и (23), непосредственным вычислением находим, что допускаемая погрешность оценивается неравенством

$$|I[u(t)] - I[u_k(t)]| \leq$$
$$\leq \left\{\left(\|V(t,x) + V_k(t,x)\|_H + 2\|\xi(x)\|_H\right) \times\right.$$
$$\times \left[2TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}\right)\right]^{1/2} P_0 + \beta\left.\|u(t) + u_k(t)\|_H\right\} \times \quad (25)$$
$$\times \phi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\|G_0[\theta_0(t) + \hbar(t) - \theta_0(t)]\|_H.$$

Таким образом, k-е приближение задачи нелинейной оптимизации определяется, согласно формулам (20), (22) и (24) и которое, как следует из оценок (21), (23) и (25), при $k > \infty$ сходится к точному решению, определяемому формулами (17), (18) и (19).

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической функции / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Бишкек: Ин-т математики НАН КР, 2003. 224 с.
5. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа. / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М., 1965. 520 с.