УДК 517.97 (575.2)(04)

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТА РАСПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Рассматриваются две задачи на определение места расположения объекта, расстояние до которого от заданных точек будет минимальным. Материал статьи будет весьма полезен в курсе математического анализа.

Ключевые слова: уравнение прямой; минимизации расстояния; приложения производной.

Классическая система преподавания вырождалась и умирала, но, вырождаясь, как это всегда бывает, особенно свирепствовала: учили почти исключительно грамматикам, ничем их не одухотворяя, учили свирепо и неуклонно, из года в год, тратя на это бесконечные часы – этот отрывок из книги о жизни великого поэта Александра Блока [1, с. 55], к сожалению, актуален и сегодня. Очень часто учебный материал ничем не одухотворяется.

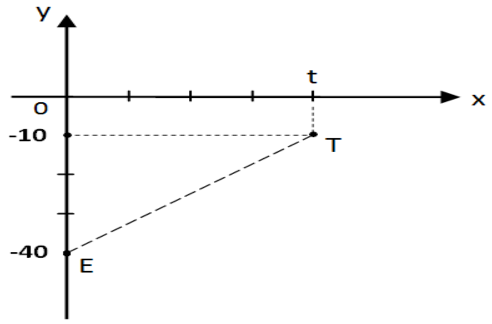
Для того чтобы вдохнуть жизнь в теоремы, доказательства, формулы нужно пытаться излагать материал на простом, понятном широкой публике языке, искать связи с окружающей действительностью.

Великий математик Д. Гильберт говорил: “Для нас, математиков, популярное изложение представляет значительно большие, чем для биологов, трудности, но тем не менее к нему нужно стремиться, а правильный путь к этому – искать прекрасный dessin (образец, пример – с французского)”.

В предлагаемой работе рассмотрены 3 задачи, которые могут послужить основой для таких dessin.

Задача 1. *Для двух городов E и T, на берегу реки решено построить насосную станцию. Город E стоит на расстоянии 40 км от реки; город T – на расстоянии 10 км, на том же берегу; расстояние между городами 50 км; река в данной местности течет по прямой. При каком расположении насосной станции общее расстояние от нее до городов будет минимальным?*

Решение задачи начнем с введения декартовой системы координат: совместим ось OX с берегом; город E с точкой (0; -40). Тогда точка T будет иметь координаты (t; -10).

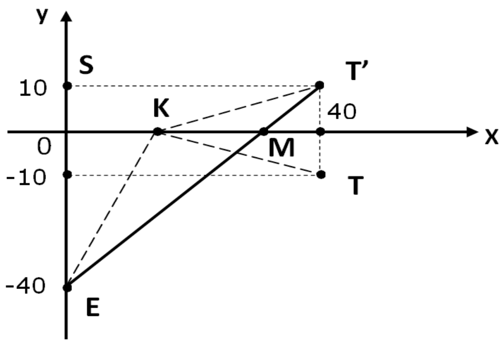


Теорема Пифагора позволяет определить величину *t*.

$$t = \sqrt{50^2 - [-40-(-10)]^2} = \sqrt{1600} = 40.$$

Точка $T'(40;\ 10)$, симметричная точке T относительно оси OX, позволяет получить изящное решение задачи.

Отметим, что расстояние от любой точки K на оси OX до точки T равно расстоянию от K до T'. Соответственно, длина трубопровода EKT равна длине EKT'. Так как прямая определяет кратчайшее расстояние, искомая точка M лежит на прямой ET' – ее координаты определяются пересечением прямой ET' с осью OX.



Уравнение прямой ET': $y = 1{,}25x - 40$, поэтому $0 = 1{,}25x_M - 40$ и отсюда $x_M = 32$.

Итак, насосную станцию нужно строить в точке с координатами $(32;\ 0)$.

Стоит отметить, что для нахождения точки М не обязательно прибегать к уравнению прямой.

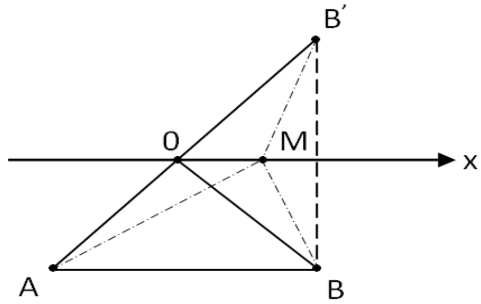
Нетрудно увидеть, что треугольник EST' подобен треугольнику EOM:

$$\frac{|EO|}{|ES|} = \frac{|OM|}{|ST'|} \Rightarrow \frac{40}{50} = \frac{|OM|}{40} \Rightarrow |OM| = \frac{40 \cdot 40}{50} = 32.$$

Идею, использованную при решении зада-чи 1, приписывают Герону Александрийскому, который жил в 1-м веке н.э. [2]. Она позволяет сформулировать и доказать следующее утверждение:

Теорема. *Из всех треугольников с одинаковыми основаниями и высотой наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.*

Доказательство. Расположим основание AB треугольника параллельно оси OX на расстоянии, равном высоте, и отметим точку B', симметричную точке B относительно OX.



Так как $/AO/ + /OB/ = /AO/ + /OB'/$, а $/AM/ + /MB/ = /AM/ + /MB'/$, периметр равнобедренного треугольника AOB меньше периметра треугольника AMB.

Проблема минимизации расстояния до объектов становится заметно сложнее в случае, когда рассматриваются не два, как в задаче 1, а больше объектов с координатами $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, …, $(x_N;\ y_N)$.

Записав соответствующую функцию

$$d = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \\ + \ldots + \sqrt{(x-x_N)^2 + (y-y_N)^2},$$

и приравняв к нулю производную этой функции, в общем случае получим достаточно сложное уравнение. Представляется интересным поиск более простых путей нахождения решения задачи. В [3, с. 540] при рассмотрении подобной задачи предложено взять точку, сумма квадратов расстояний до которой является минимальной. Но, к сожалению, несложно показать, что точка, сумма квадратов расстояний до которой от вершин треугольника является минимальной, может не быть оптимальной, если рассматривать минимум суммы расстояний.

Задача 2. *Определим координаты точки $L(u;v)$, сумма квадратов расстояний до которой от точек $P(-5;\ 0)$, $Q(5;\ 1)$, $R(0;2)$ является минимальной.*

Выпишем соответствующую функцию: $S(u;\ v) = [u - (-5)]^2 + [v - 0]^2 + [u - 5]^2 + [v - 1]^2 + [u - 0]^2 + [v - 2]^2$;

приравняем частные производные к нулю:

$$\begin{cases} S_u = 0, \\ S_v = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2[u-(-5)] + 2[u-5] + 2u = 0, \\ 2v + 2[v-1] + 2[v-2] = 0, \end{cases}$$

и решив полученную систему, найдем координаты критической точки: (*0; 1)*.

Вычислим вторые производные: $S_{uu} = 6; S_{uv} = 0; S_{vu} = 0; S_{vv} = 6$, и увидев, что $S_{uu}S_{vv} - S_{uv}S_{vu} > 0$; $S_{uu} > 0$, убедимся в том, что точка (*0; 1)* является точкой минимума функции *S (u; v)*.

К сожалению, точка (*0; 1)* не является оптимальной, если рассматривать минимум суммы расстояний.

Так, сумма расстояний от точки (*0; 1)* до точек *P(-5; 0), Q(5; 1), R(0;2)* равна

$$\sqrt{[0-(-5)]^2+[1-0]^2}+\sqrt{[0-5]^2+[1-1]^2}+$$
$$+\sqrt{[0-0]^2+[1-2]^2}=\sqrt{26}+5+1=\sqrt{26}+6.$$

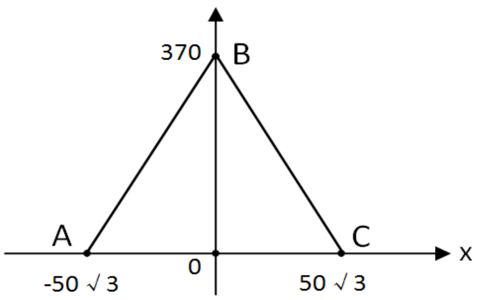
В то же время, если вместо точки (*0; 1)* взять точку *R*, то сумма расстояний будет меньше:

$$\sqrt{[0-(-5)]^2+[2-0]^2}+\sqrt{[0-5]^2+[2-1]^2}+$$
$$+\sqrt{[0-0]^2+[2-2]^2}=\sqrt{29}+\sqrt{26}+0.$$

Далее мы покажем, что задача определения минимума суммы расстояний до вершин равнобедренного треугольника является относительно простой.

Задача 3. *В долине Оптима расположены 3 города. Расстояние от города A до B и от города B до C равно 380 км, а от города C до A – 173,2 км. Власти планируют построить теплоэлектростанцию (ТЭЦ) так, чтобы сумма расстояний от нее до городов была минимальной. Где должна быть расположена ТЭЦ*?

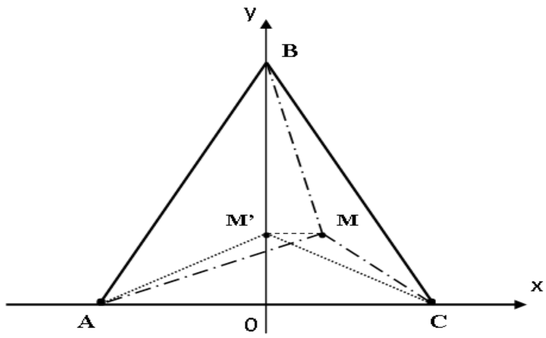
Для того чтобы решить эту задачу, введем декартову систему координат, расположив точки *A* и *C* на оси *OX*, точку *B* на оси *OУ*.



Обратив внимание на то, что *173,2* приблизительно равно $100\sqrt{3}$, запишем координаты точек *A* и *C*: $A(-50\sqrt{3};\,0)$, $C(50\sqrt{3};\,0)$. Теорема Пифагора позволяет определить координаты точки *B: B(0; 370).*

Покажем, что точка *M'(x; y)*, в которой достигается минимум суммы расстояний от вершин треугольника ABC, лежит на оси *OУ* .

Предположим, что искомая точка *M(x; y)* не лежит на оси *OУ*, наряду с ней, рассмотрим точку *M'(0; y)*.



В силу только что доказанной ТЕОРЕМЫ, */AM'/ + /M'C/* меньше, чем */AM/ + /MC/*, а */BM/*, как и длина гипотенузы больше, чем длина катета *BM*'. Следовательно, сумма расстояний от точки *M* до вершин треугольника *ABC* больше, чем соответствующая сумма расстояний от *M*', что противоречит предположению об оптимальности точки *M*.

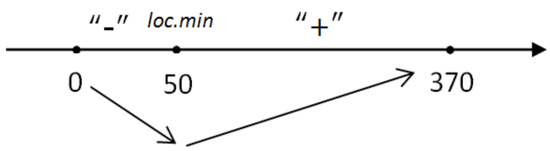
Таким образом, доказано, что искомая точка должна лежать на *OУ*. Обозначим ее координаты (*0; y*), и, использовав формулу расстояния между точками на плоскости, получим функцию

$$d=\sqrt{[0-(-50\sqrt{3})]^2+y^2}+$$
$$+\sqrt{[0-50\sqrt{3}]^2+y^2}+370-y=$$
$$=2\sqrt{7500+y^2}+370-y,$$

минимум которой нужно получить.

Продифференцировав $d'=2\dfrac{2y}{2\sqrt{7500+y^2}}-1$, и приравняв производную к нулю, получим решение полученного уравнения $y = 50$.

Отметим на отрезке [*0; 370*] области определения функции *d*, точку *y = 50,* определим знак производной на полученных промежутках и убедимся в том, что эта точка является точкой минимума:



Итак, для того чтобы сумма расстояний до городов *A*, *B*, *C* была минимальной, ТЭЦ желательно построить в точке с координатами (*0; 50*) в соответствующей системе координат.

Общее расстояние при этом будет равно:

$$d_{min} = d(0;\ 50) = 2\sqrt{7500+50^2} + 370 - 50 = 2\cdot 100 + 320 = 520.$$

Примечание. Покажем, что $d_{min} = 520$ меньше, чем расстояние от точки, лежащей на оси *OУ*, в которой достигается минимум суммы квадратов расстояний до вершин треугольника *ABC*.

Итак, пусть *SS(y)* – сумма квадратов расстояний от точки *(0; y)* до вершин треугольника *ABC*. Тогда

$$SS(y) = [0 - (-50\sqrt{3})]^2 + [y - 0]^2 + [0 - 50\sqrt{3}]^2 + [y - 0]^2 + [0 - 0]^2 + [y - 370]^2 .$$

Приравняв к нулю производную, получим, что $y = 370/3$.

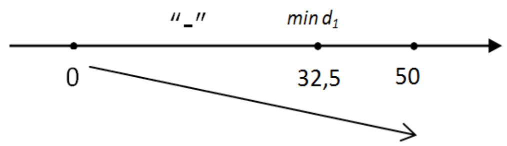
Расстояние от вершин *A, B, C* до точки *M(0; 370/3)*:

$$d(0;\ 370/3) = 2\sqrt{7500+(370/3)^2} + 370 - 370/3 = 548{,}07,$$

больше, чем $d(0;\ 50) = 520$.

Задача 3’. *В условиях задачи 2, вместо города B, рассмотрим город B’. Расстояние от города A до B’ и от города B’ до C равно 92,5 км, а от города C до A по-прежнему – 173,2 км.*

В этом случае координатами точки *B’* будут (*0; 32,5*), а аналог функции *d,* который будет иметь вид $d_1 = 2\sqrt{7500+y^2} + 32{,}5 - y$, будем рассматривать на отрезке *[0; 32,5]*. Так как производная функции d_1 совпадает с производной *d,* решением соответствующего уравнения будет $y = 50$. Это число не попадает в область определения функции d_1, поэтому во всей области определения производная имеет один и тот же знак – отрицательный, и, следовательно, функция d_1 на отрезке *[0; 32,5]* убывает:



Таким образом, минимальное значение функции d_1 достигается в точке *32,5* – в вершине *B’* треугольника *AB’C.*

Тогда искомое расстояние равно $2\cdot 92{,}5 = 185$ *км.*

Отметим, что в этом случае минимум суммы квадратов расстояний от вершин треугольника *AB’C* достигается в точке $(0;\ \frac{32{,}5}{3})$, – в этом легко убедиться, повторив выкладки, проведенные ранее, и равен

$$2\sqrt{7500+\left(\frac{32{,}5}{3}\right)^2} + 32{,}5 - \frac{32{,}5}{3} = 196{,}22 \text{ км.}$$

Литература

1. *Орлов В.Н.* Гамаюн. Жизнь Александра Блока. Л.: Советский писатель, 1980. 728 с.
2. Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика, 1985. 352 с.
3. *Hoffman L.D., Bradley G.L.* Calculus McGraw Hill, USA, 7th ed., 2000.