

УДК 517.977.5 (575.2) (04)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

К.Р. Карабакиров

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления колебаниями струны конечной длины в случае, когда колебательный процесс происходит под действием нескольких точечных подвижных источников, каждый из которых нелинейно зависит от функции управления.

Ключевые слова: упругие колебания; оптимальное управление; интегральный функционал.

I. Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Пусть управляемый процесс $V(t, x)$ в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ удовлетворяет краевой задаче [1]:

$$V_{tt} = V_{xx} + \sum_{k=1}^m \delta[x - \mu_k(t)] f_k[u_k(t)], \quad (1)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$V_x(t, 0) = 0, \quad V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; точки приложений внешних воздействий $f_k[u_k(t)] \in H(0, T)$, каждая из которых нелинейно зависит от функции u_k изменяются по заданному закону $\mu_k = \mu_k(t), 0 < \mu_k(t) < 1$; $\psi_1(x) \in H(0, 1)$, $\psi_2(x) \in H(0, 1)$ – заданные функции начального состояния струны; H – пространство Гильберта; постоянная $\alpha > 0$; T – фиксированный момент времени.

Краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение:

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) \sum_{k=1}^m z_n[\mu_k(\tau)] f_k[u_k(\tau)] d\tau \right] z_n(x), \quad (4)$$

которое удовлетворяет интегральному тождеству [2]:

$$\int_0^1 (V_t \Phi)_t^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 [V_t \Phi_t - V_x \Phi_x + \sum_{k=1}^m \delta(x - \mu_k(t)) f_k[u_k(t)] \Phi] dx dt - \alpha \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t, 1) V(t, 1) dt$$

для любых моментов времени t_1 и t_2 ($0 \leq t_1 < t_2 \leq T$), и для любой функции $\Phi(t, x) \in C^{1,1}[\bar{Q}]$ и начальным условиям (2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V(t, x) - \psi_1(x)] \Phi_0(x) dx = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 [V_t(t, x) - \psi_2(x)] \Phi_1(x) dx = 0,$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x) \in H(0, 1)$, $\Phi_1(x) \in H(0, 1)$.

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности. Векторное управление $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in H^m(0, T)$, $H^m = H \times H \times \dots \times H$ – декартово произведение пространств H , для которого краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение, назовем допустимым управлением. Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: на множестве допустимых управлений $u(t) \in H^m(0, T)$ требуется минимизировать функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [V(T, x) - \xi(x)]^2 dx + 2\beta \int_0^T \sum_{k=1}^m |u_k(t)| dt, \quad \beta > 0, \quad (5)$$

где $\xi(x) \in H(0, 1)$ – заданная функция.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [3] оптимальное управление $u(t)$ удовлетворяет следующим условиям оптимальности:

$$2\beta \left(\frac{\partial f_k[u_k(t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k = \omega[t, \mu_k(t)], \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\left(\frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \right) \text{sign } u_k (t) > 0, \quad (7)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, m,$

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n (T-t) \left[\int_0^T \sum_{k=1}^m G_n [\tau, \mu_k (\tau)] f_k [u_k (\tau)] d\tau - h_n \right] z_n (x), \quad (8)$$

$$G_n (t, \mu_k (t)) = \frac{1}{\lambda_n} z_n [\mu_k (t)] \sin \lambda_n (T-t),$$

$$h_n = \xi_n - \psi_{1n} \cos \lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n T.$$

III. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Согласно (6) и (9) относительно оптимального управления $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ получим систему нелинейных интегральных уравнений

$$\beta \left(\frac{\partial f_k [u_k]}{\partial u_k} \right)^{-1} \text{sign } u_k (t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_k (t)] \int_0^T \sum_{i=1}^m G_n [\tau, \mu_i (\tau)] f_i [u_i (\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_k (t)] h_n, \quad (9)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, m,$

решение которой должно удовлетворять системе дополнительных условий (7).

Вопросы разрешимости задачи (9) и (7) могут быть исследованы по методике работы [5]. В наборе $\{u_1(t), \dots, u_m(t)\}$, функции $u_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, m,$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Решение интегрального уравнения Фредгольма обладает свойством непродолжаемости решения [4]. Поэтому решением системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма (9) будет лишь вектор-функция, каждая компонента которой является функцией только одного знака, т.е. либо положительного, либо отрицательного при всех $t \in [0, T]$. Количество всех наборов, где каждая функция определенного знака (либо больше нуля, либо меньше нуля), в промежутке $[0, T]$, равно 2^m .

В дальнейшем для определенности изложение проведем для набора следующего вида

$$\{u_1^+(t), \dots, u_s^+(t), u_{s+1}^-(t), \dots, u_m^-(t)\}, \quad 1 \leq s \leq m. \quad (10)$$

В этом случае система (9) приводится к виду:

$$2 \left(\frac{\partial f_k [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} = \omega [t, \mu_k (t)], \quad k = 1, \dots, s, \quad (11)$$

$$-2 \left(\frac{\partial f_k^{-1} [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} = \omega [t, \mu_k (t)], \quad k = s + 1, \dots, m,$$

а система условий (7) переходит к следующей системе условий:

$$\frac{\partial f_k [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\left(\frac{\partial f_k [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} \right) > 0, \quad (12_+)$$

$k = 1, \dots, s,$

$$\frac{\partial f_k [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\left(\frac{\partial f_k [t, u_k (t)]}{\partial u_k} \right)^{-1} \right) < 0, \quad (12_-)$$

$k = s + 1, \dots, m$

Согласно (8) систему равенств (11) перепишем в виде:

$$\beta \left(\frac{\partial f_i [t, u_i (t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i (t)] \int_0^T \left(\sum_{k=1}^s G_n [\tau, \mu_k (\tau)] f_k [\tau, u_k (\tau)] + \sum_{k=s+1}^m G_n [\tau, \mu_k (\tau)] f_k [\tau, u_k (\tau)] \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i (t)] h_n, \quad i = 1, \dots, s;$$

$$-\beta \left(\frac{\partial f_i [t, u_i (t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i (t)] \int_0^T \left(\sum_{k=1}^s G_n [\tau, \mu_k (\tau)] f_k [\tau, u_k (\tau)] + \sum_{k=s+1}^m G_n [\tau, \mu_k (\tau)] f_k [\tau, u_k (\tau)] \right) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n [t, \mu_i (t)] h_n, \quad i = s + 1, \dots, m, \quad (13)$$

т.е. относительно набора (10) получили систему нелинейных интегральных уравнений (13).

IV. О разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений. Для построения решения этой системы сначала, согласно методике работы [5], введем обозначения:

$$\beta \left(\frac{\partial f_i [t, u_i (t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^+(t), \quad i = 1, \dots, s, \quad (14_+)$$

$$-\beta \left(\frac{\partial f_i [t, u_i (t)]}{\partial u_i} \right)^{-1} = p_i^-(t), \quad i = s + 1, \dots, m. \quad (14_-)$$

Согласно (12₊) из (14₊) функции $u_i(t), i = 1, \dots, s,$ определяются однозначно, т.е. имеют место равенства:

$$u_i^+(t) = \varphi_i^+[t, p_i^+(t), \beta], \quad i = 1, \dots, s. \quad (15_+)$$

Согласно (12) из (14) аналогичным образом находим функции:

$$u_i^-(t) = \varphi_i^-[t, p_i^-(t), \beta], \quad i = s+1, \dots, m. \quad (15)$$

В формулах (15₊)–(15₋) функции $\phi_i^+(\cdot)$ и $\phi_i^-(\cdot)$ являются известными функциями.

Теперь с учетом (14₊)–(15) систему нелинейных интегральных уравнений (13) перепишем в виде

$$\begin{aligned} p_i^+(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T & \\ \left(\sum_{k=1}^s G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right. & \\ \left. + \sum_{k=s+1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau = & \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{1, s}; & \\ p_i^-(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] \int_0^T & \\ \left(\sum_{k=1}^s G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^+(\tau, p_k^+(\tau), \beta)] + \right. & \\ \left. + \sum_{k=s+1}^m G_n[\tau, \mu_k(\tau)] f_k[\tau, \phi_k^-(\tau, p_k^-(\tau), \beta)] \right) d\tau = & \\ = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \mu_i(t)] h_n, \quad i = \overline{s+1, m} & \end{aligned}$$

или в операторной форме

$$\bar{p} = G[\bar{p}], \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} G[\bar{p}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n[t, \bar{\mu}(t)] \left[h_n - \int_0^T G_n^*(\tau, \bar{\mu}(\tau)) f[\tau, \bar{\phi}(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)] d\tau \right], \\ \bar{p}(t) = \{ p^+(t), p^-(t) \} = \\ = \{ p_1^+(t), \dots, p_s^+(t), p_{s+1}^-(t), \dots, p_m^-(t) \}, \\ G[\bar{p}] = \{ G_1[p_1], \dots, G_m[p_m] \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n[t, \bar{\mu}(t)] &= \{ G_n[t, \mu^+(t)], G_n[t, \mu^-(t)] \} = \\ &= \{ G_n[t, \mu_1(t)], \dots, G_n[t, \mu_s(t)], G_n[t, \mu_{s+1}(t)], \dots, G_n[t, \mu_m(t)] \}, \\ \bar{f}[t, \bar{\phi}(t, \bar{p}(t), \beta)] &= \\ &= \{ \bar{f}[t, \phi^+(t, p^+(t), \beta)], \bar{f}[t, \phi^-(t, p^-(t), \beta)] \} = \\ &= \left\{ \begin{aligned} &f_1[t, \phi_1^+[t, p_1^+(t), \beta]], \dots, f_s[t, \phi_s^+[t, p_s^+(t), \beta]], \\ &f_{s+1}[t, \phi_{s+1}^-[t, p_{s+1}^-(t), \beta]], \dots, f_m[t, \phi_m^-[t, p_m^-(t), \beta]] \end{aligned} \right\}, \end{aligned}$$

* – знак транспонирования.

Далее были найдены достаточные условия существования решения системы нелинейных интегральных уравнений (16) и задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации со сколь угодно точностью.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 4. С. 743–755.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
5. Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Автореф. дис... докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 21 с.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.