УДК 66.047.37 (575.2)(04)

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕПЛОУСТОЙЧИВОСТЬ НАРУЖНЫХ СТЕН ЗДАНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ ПАРАМЕТРОВ

З.В. Кобулиев, Д.Х. Саидов

Рассматривается создание математической модели температурного поля стен при гармоническом изменении внешних и внутренних факторов. Выявлены теплофизические параметры, с помощью которых возможно снижение общего уровня колебаний температуры наружных стен зданий.

Ключевые слова: математическая модель; уравнение теплопроводности; тепловой баланс; коэффициенты теплопроводности, теплоотдачи и температуропроводности; амплитуда колебания температуры.

Тепловой режим зданий и сооружений в летнее время формируется под воздействием внешних климатических факторов и зависит от геометрических и теплофизических параметров ограждающих конструкций. Из-за изменчивости внешних климатических условий и инерционности ограждающих конструкций, их тепловое состояние, включая и внутреннюю среду помещений, устанавливается нестационарным. При точном математическом описании рассматриваемой системы, даже если она будет составлена, не представляется возможным найти точное аналитическое решение, и из-за огромных затрат времени на расчеты с помощью ПЭВМ оно затруднительно в плане числовой реализации [1, 2].

В связи с отмеченными сложностями расчетов предлагается рассматривать упрощенную модель. Она заманчива тем, что позволяет проанализировать предельный случай теплового равновесия, когда температура поля всей ограждающей конструкции выровнена, и теплопередачу через ограждения можно считать стационарной.

Для составления модели предполагается:

- температура воздуха $t_в$ внутри здания одинакова во всем объеме;
- теплофизические свойства материалов не зависят от температуры;
- внутреннее тепловыделение в ограждение отсутствуют;
- температура внутренней поверхности конструкций $\tau_в$ одинакова и $\tau_в = t_в + \Delta t_в$, где $t_в$ – расчетная летняя температура внутреннего воздуха, °C; $\Delta t_в$ – расчетный летний перепад между температурами внутренней поверхности конструкции и внутреннего воздуха, °C.

Руководствуясь существующими рекомендациями [1, 3], для помещений с кондиционированием воздуха можно принять $\Delta t_в = 1{,}5^o C = const$.

На основе вышеизложенного запишем уравнения теплового баланса однослойной наружной стены здания. Ограждающие конструкции зданий поглощают в каждый момент времени AI − количество энергии от падающей на нее солнечной радиации. Полезная энергия: $\alpha_в(\tau_в - t_в) + K_{усл}(\tau_н - \tau_в)$, где условный коэффициент теплопередачи определяется по формуле: $K_{усл} = 1/\left((\delta/\lambda) + 1/\alpha_в\right)$. Здесь δ – толщина стены, м; λ − коэффициент теплопроводности стены, Вт/(м·К) и $\alpha_в$ − коэффициент теплоотдачи между внутренней поверхностью и внутренним воздухом, Вт/(м²·К).

Полученная полезная энергия расходуется на увеличение теплосодержания внутреннего воздуха и ограждающей конструкции здания:

$$c_в\rho_в V_в \frac{dt_в}{d\tau} + c_к\rho_к V_к \frac{dt_в}{d\tau} \text{ или } \frac{dt_в}{d\tau}\left(c_в\rho_в V_в + c_к\rho_к V_к\right).$$

В случае негерметичного ограждения и ограждения из пористых материалов, к которым относятся материалы и конструкции на основе стеблей хлопчатника, имеют место также и потери тепла за счет инфильтрации $\alpha_{ин}(t_в - t_H)$, где t_H − температура наружного воздуха, °C.

Итак, имеем:

$$\frac{dt_в}{d\tau}\left(c_в\rho_в V_в + c_к\rho_к V_к\right) = \left[\alpha_в(\tau_в - t_в) + K_{усл}(t_1 - \tau_в)\right]\cdot F - \alpha_{ин}(t_в - t_н)\cdot F_{ин}, \quad (1)$$

где τ_H – температура наружной поверхности ограждающей конструкции зданий или температура ограждения в месте падения солнечной радиаций, т.е. $\tau_H = t_1$.

Учитывая, что в общем случае на поверхностях ограждений происходит сложный теплообмен, определяемый граничными условиями II (заданная интенсивность теплового потока) и III рода (заданные условия теплообмена с окружающей средой), неизвестные в уравнении (1) $t_в$ и t_1 определяются из следующих уравнений с соответствующими граничными условиями:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}\,, \tag{2}$$

$$\begin{cases} -\lambda\dfrac{\partial t_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = AI_1 - \alpha_H(t_1 - t_H)\,, \\ -\lambda\dfrac{\partial t_1}{\partial x}\Big|_{x=\delta} = K_{усл}(t_1 - t_в)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь A – коэффициент поглощения солнечной радиации материалом наружной поверхности ограждающей конструкции; I_1 – сумма прямой и рассеянной солнечной радиации, Вт/м²; $c_в\rho_в V_в$ и $c_K\rho_K V_K$ – теплоемкость, кДж/(кг·К), плотность, кг/м³ и объем, м³, соответственно внутреннего воздуха здания и ограждающих его конструкций; $F, F_{ин}$ – площади теплоотводящей поверхности со значением температуры t_1, а также инфильтрирующая поверхность, м²; $\alpha_H, \alpha_в, \alpha_{ин}$ – коэффициенты теплоотдачи с наружным и внутренним воздухом, а также при инфильтрации Вт/(м²·К); a и λ – коэффициенты температуропроводности, м²/с и теплопроводности, Вт/(м·К) – ограждающей конструкции.

Решение уравнения (2) ищется в виде $t_1 = t_{01} + t_{11}e^{i\omega\tau}$. Входящие в уравнение I_1, $t_в$ и t_H представляются в виде гармонического ряда:

$$\begin{cases} I_1 = I_0 + Ie^{i(\omega\tau-\varphi)}, \\ t_H = t_{OH} + t_{1H}e^{i(\omega\tau-\varphi_H)}, \\ t_в = t_{ов} + t_{1в}e^{i(\omega\tau-\varphi_в)}. \end{cases} \tag{4}$$

где φ, $\varphi_н$, $\varphi_в$ – соответственно фазы запаздывания колебаний солнечной радиации, наружного и внутреннего воздуха.

Первая и вторая производные для t_1 выглядят как

$$\frac{\partial t_1}{\partial x} = t'_{01} + t'_{11}e^{i\omega\tau},$$

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} = t''_{01} + t''_{11}e^{i\omega\tau} \tag{5}$$

соответственно по времени τ:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = i\omega t_{11}e^{i\omega\tau}. \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) соотношение (2) представляется в виде:

$$i\omega t_{11}e^{i\omega\tau} = a\left(t''_{01} + t''_{11}e^{i\omega\tau}\right). \tag{7}$$

Аналогично из (3) с учетом (4) и (5) имеем:

$$-\lambda\left(t'_{o1} + t'_{11}e^{i\omega\tau}\right)\Big|_{x=0} = A\left(I_0 + Ie^{i(\omega\tau-\varphi)}\right) - \alpha_H\Big(t_{01} + t_{11}e^{i\omega\tau} - t_{OH} - t_{1H}e^{i(\omega\tau-\varphi_H)}\Big), \tag{8}$$

$$-\lambda\left(t'_{o1} + t'_{11}e^{i\omega\tau}\right)\Big|_{x=\delta} = K_{усл}\Big(t_{01} + t_{11}e^{i\omega\tau} - t_{0в} - t_{1в}e^{i(\omega\tau-\varphi_в)}\Big). \tag{9}$$

Приравнивая последовательно члены, содержащие и не содержащие $e^{i\omega\tau}$ в уравнениях (7–9), получим

$$\begin{cases} at''_{01} = 0, \\ i\omega t_{11} = at''_{11} \end{cases} \tag{10}$$

или

$$t''_{11} - n^2 t_{11} = 0, \tag{11}$$

где

$$n = \sqrt{\frac{i\omega}{a}}\,, \tag{12}$$

$$\begin{cases} -\lambda t'_{01}\Big|_{x=0} = AI_0 - \alpha_H(t_{01} - t_{0H})\,, \\ -\lambda t'_{01}\Big|_{x=\delta} = K_{усл}(t_{01} - t_{0в})\,, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} -\lambda t'_{11}\Big|_{x=0} = AI - \alpha_H(t_{11} - t_{1H}e^{-i\varphi_H})\,, \\ -\lambda t'_{11}\Big|_{x=\delta} = K_{усл}(t_{11} - t_{1в}e^{-i\varphi_в})\,. \end{cases} \tag{14}$$

Решение уравнения (11):

$$t_{01} = C_1 x + C_2. \tag{15}$$

При $x=0$ $t_{01}=C_2$, а при $x=\delta$ $t_{01}=C_1\delta+C_2$.

Вместе с тем $\dfrac{\partial t_{01}}{\partial x}=C_1$.

С учетом сказанного выше из (13) получим:

$$-\lambda C_1\big|_{x=0}=AI_0-\alpha_H\left(C_2-t_{0H}\right),$$

$$-\lambda C_1\big|_{x=\delta}=K_{\text{усл}}\left(C_1\delta+C_2-t_{0в}\right).$$

Откуда

$$C_1=\frac{\alpha_в\left[\alpha_н\left(t_{ов}-t_{он}\right)-AI_о\right]}{\lambda\left(\alpha_н+\alpha_в\right)+2\delta\alpha_н\alpha_в},$$

$$C_2=\frac{\lambda t_{ов}\alpha_в+\left(AI_0+\alpha_н t_{он}\right)\left(\lambda+2\delta\alpha_в\right)}{\lambda\left(\alpha_н+\alpha_в\right)+2\delta\alpha_н\alpha_в}. \tag{16}$$

Теперь решим уравнение (11) при граничных условиях (14).

Решение уравнения (11):

$$t_{11}=C_3 sh(n,x)+C_4 ch(n,x). \tag{17}$$

Значение производной и самой температуры t_1 при $x=0$ и $x=\delta$ равно

$$t_{11}\big|_{x=0}=C_4,$$

$$t_{11}\big|_{x=\delta}=C_3 sh(n,\delta)+C_4 ch(n,\delta); \tag{18}$$

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\left(nC_3 ch(n,x)+nsh(n,x)\right)\big|_{x=0}=nC_3,$$

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x}\bigg|_{x=\delta}=nC_3 ch(n,\delta)+nsh(n,\delta)\cdot C_4.$$

Подставляя (18) в (14), получим:

$$-\lambda nC_3=AI-\alpha_H\left(C_4-t_{1H}e^{-i\varphi H}\right);$$

$$-\lambda\left(nC_3 ch(n,\delta)+nC_4 sh(n,\delta)\right)=$$
$$=K_{\text{усл}}\left(C_3 sh(n,\delta)+C_4 ch(n,\delta)\right)-$$
$$-t_{1в}e^{-i\varphi в}. \tag{19}$$

Из (19), предварительно вводя обозначения

$$\psi=\lambda nch(n,\delta)+K_{\text{усл}}sh(n,\delta);$$

$$r=K_{\text{усл}}n\lambda;\quad N=\alpha_H\psi; \tag{20}$$

$$m=sh(n,\delta)\left[K_{\text{усл}}\alpha_H+\lambda^2 n^2\right]+$$
$$+\lambda n\left(K_{\text{усл}}+\alpha_H\right)ch(n,\delta),$$

получим:

$$C_3=\frac{t_{1в}e^{-i\varphi_в}\cdot r\alpha_н+AI(\psi\alpha_н-m)+t_{1н}e^{-i\varphi_н}(N\alpha_н-\alpha_н m)}{m},$$

$$C_4=\frac{t_{1в}e^{-i\varphi_в}\cdot r+AI\psi+t_{1н}e^{-i\varphi_н}\cdot N}{m}. \tag{21}$$

Из (17) с учетом (21) имеем:

$$t_{11}\big|_{x=\delta}=\frac{t_{1в}e^{-i\varphi_в}(r\alpha_н sh(n,\delta)+rCh(n,\delta)\lambda n)}{m}+$$
$$+\frac{AI[(\psi\alpha_н-m)sh(n,\delta)+\psi ch(n,\delta)\lambda n]}{m}+$$
$$+\frac{t_{1н}e^{-i\varphi_н}[(\alpha_н N-\alpha_н m)sh(n,\delta)+n\lambda ch(n,\delta)]}{m}, \tag{22}$$

или

$$\begin{cases} t_{11}\big|_{x=\delta}=\dfrac{\beta\, t_{1в}e^{-i\varphi\, в}+AIk+\eta\, t_{1H}}{m}, \\ t_{11}\big|_{x=0}=\dfrac{t_{1в}e^{-i\varphi\, в}\cdot\eta+AIg+t_{1H}e^{-i\varphi\, H}\cdot N}{m}. \end{cases} \tag{23}$$

где $\beta=K_{\text{усл}}n\lambda\, ch(n,\delta)+K_{\text{усл}}\alpha_H sh(n,\delta),$

$k=\lambda n,\ \eta=\alpha_H ke^{-i\varphi H}$

Окончательно для t_1

$$t_1\big|_{x=0}=\frac{\left(K_{\text{усл}}\delta+\lambda\right)\left(AI_0+\alpha_н t_{он}\right)+K_{\text{усл}}\lambda\cdot t_{ов}}{K_{\text{усл}}\lambda+\left(K_{\text{усл}}\delta+\lambda\right)\alpha_н}+$$
$$+\frac{AI\psi+t_{1в}e^{-i\varphi_в}r+t_{1н}e^{-i\varphi_н}\cdot N}{m}\cdot e^{i\omega\tau},$$

$$t_1\big|_{x=\delta}=\left[\frac{K_{\text{усл}}t_{ов}\alpha_н-K_{\text{усл}}(AI_0+\alpha_н t_{он})}{K_{\text{усл}}\lambda+\left(K_{\text{усл}}\delta+\lambda\right)\alpha_н}\right]\cdot\delta+$$
$$+\frac{\left(K_{\text{усл}}\delta+\lambda\right)\left(AI_0+\alpha_н t_{он}\right)+K_{\text{усл}}\lambda\cdot t_{ов}}{K_{\text{усл}}\lambda+\left(K_{\text{усл}}\delta+\lambda\right)\alpha_н}+$$
$$+\frac{\beta\cdot t_{1в}e^{-i\varphi_в}+AIk+\eta t_{1н}}{m}\cdot e^{i\omega\tau}. \tag{24}$$

Представим (1) в виде

$$E\frac{dt_в}{d\tau}+Dt_в=\left[K_{\text{усл}}t_1 F+\alpha_{ин}F_{ин}t_н\right]_{x=\delta}, \tag{25}$$

где $E=c_в\rho_в V_в+c_к\rho_к V_к$, $D=K_{\text{усл}}F+\alpha_{ин}F_{ин}$.

Решение (25) ищется в виде

$$t_в=t_{0в}+t_{1в}e^{i\omega\tau}. \tag{26}$$

С учетом (24), подставляя (26) в (25) и выделяя члены, содержащие и не содержащие $e^{i\omega\tau}$, получим:

$$t_{ов} D = K_{усл} F \cdot \left[\left(\frac{K_{усл} t_{ов} \alpha_н - K_{усл} (AI_0 + \alpha_н t_{он})}{K_{усл} \lambda + (K_{усл} \delta + \lambda)\alpha_н} \right) \cdot \delta + \right.$$

$$+ \frac{(K_{усл} \delta + \lambda)(AI_0 + \alpha_н t_{он}) + K_{усл} \lambda \cdot t_{ов}}{K_{усл} \lambda + (K_{усл} \delta + \lambda)\alpha_н} +$$

$$\left. + \alpha_{ин} F_{ин} t_{он} \right], \quad (27)$$

$$i\omega E t_{1в} + D t_{1в} =$$

$$= \left[K_{усл} F \cdot \frac{\beta t_{1в} e^{-i\varphi\tau} + AIk + \eta t_{1н}}{m} + \alpha_{ин} F_{ин} t_{1н} \right] \cdot \quad (28)$$

Из (27) и (28) можно найти значения $t_{0в}$ и $t_{1в}$ через параметры наружного воздуха и падающую радиацию.

В случае отсутствия инфильтрации или при пренебрежении инфильтрацией $\alpha_{ин} = 0$, имеем:

$$t_{ов} = K_{усл} F \left[\frac{\lambda (AI_o + \alpha_н t_{он})}{D(K_{усл}\lambda + (K_{усл}\delta + \lambda)\alpha_н) - K^2_{усл} F(\lambda + \alpha_н \delta)} \right], \quad (29)$$

$$t_{1в} = \frac{K_{усл} F}{(i\omega E + D)} \left[\frac{\beta t_{1в} e^{-i\varphi\tau} + AIk + \eta t_{1н}}{m} \right]. \quad (30)$$

В последней формуле (30), из которой находится $t_{1в}$, становится возможным выявить теплофизические параметры, с помощью которых можно снизить общий уровень колебания температуры ограждающей конструкции зданий.

Следует отметить, что разность между величинами, найденными по формулам (30) и (29), составляет величину расчетной амплитуды колебания температуры внутренней поверхности ограждающих конструкций зданий $- A_{\tau_в}$:

$$A_{\tau_в} = t_{1в} - t_{0в} =$$

$$= \left(\frac{F(AI\lambda n + \eta t_{1н})}{K^{-1}_{усл} m (i\omega E + D) - F e^{-i\omega\tau}} \right) -$$

$$- \left(\frac{K_{усл} F \lambda (AI_o + \alpha_н t_{он})}{D(K_{усл}\lambda + (K_{усл}\delta + \lambda)\alpha_н) - K_{усл}{}^2 F(\lambda + \alpha_н \delta)} \right). \quad (31)$$

При обеспечении теплоустойчивости ограждающих конструкций, найденное по формуле (31) значение $A_{\tau_в}$ не должно превышать нормативного (требуемого) значения амплитуды колебания температуры внутренней поверхности ограждающих конструкций $-$ $A^{тр}_{\tau_в}$, согласно нормативным документам [3]

$$A_{\tau_в} = (t_{1в} - t_{0в}) \le A^{тр}_{\tau_в} . \quad (32)$$

В свою очередь, $A^{тр}_{\tau_в}$ определяется по нижеприведенной в нормативной литературе формуле [3]:

$$A^{тр}_{\tau_в} = 2{,}5 - 0{,}1(t_H - 21). \quad (33)$$

В формуле (33) $t_н$ – температура наиболее жаркого месяца района местонахождения здания или сооружения, °С, определяемая также по нормативной литературе [4].

Таким образом, используя разработанную математическую модель теплового режима зданий, становится возможным дать оценку теплоустойчивости его ограждающих конструкций.

Литература

1. *Богословский В.Н.* Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха). М.: Высш. школа, 1982. 415 с.
2. *Лыков А.В.* Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1978. 408 с.
3. СНиП II-3–79** Строительная теплотехника. Нормы проектирования. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. 32 с.
4. СНиП 2.01.01–82 Строительная климатология и геофизика / Госстрой СССР. М.: Стройиздат, 1983. 136 с.