УДК 515.123 (575.2) (04)

О ВНЕШНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ПОЛНОТЫ ПО ЧЕХУ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.А. Чекеев, М.А. Абдраимова

Устанавливается равномерно полное по Чеху расширение и даётся его характеристика в своем Самуэловском бикомпактом расширении.

Ключевые слова: $\mathcal{K}$-полнота; $\mathcal{K}$-фильтр Коши; равномерная полнота по Чеху.

Данная работа посвящена характеризации полноты по Чеху равномерных пространств "внутри" своих Самуэловских расширений. Мы будем использовать результаты и понятия из наших предыдущих работ [1, 2], а обозначения и терминологию из книг [3–5]. Новая необходимая информация будет введена дополнительно.

Пусть uX – равномерное пространство и $\mathcal{K} \subset u$ – произвольная система равномерных покрытий. Фильтр $\mathcal{F}$ на uX называется *$\mathcal{K}$-фильтром Коши* в uX, если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$, для любого $\alpha \in \mathcal{K}$.

Определение 1 ([5, 6]). Пусть uX – равномерное пространство $\mathcal{K} \subset u$. Равномерное пространство и X называется *$\mathcal{K}$-полным,* а система $\mathcal{K}$ называется полной, если всякий $\mathcal{K}$-фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\cap\left\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\right\} \neq \varnothing$.

Лемма 2 (Лемма 1.2.11 [7]). *Пусть uX-$\mathcal{K}$ – полное равномерное пространство, где $\mathcal{K} \subset u$. Тогда существует такая псевдоравномерность $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}} \subset u$, что $\left|\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}\right| = \left|\mathcal{K}\right|$ и $uX - \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$ – полное равномерное пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть uX–$\mathcal{K}$ – полное равномерное пространство, где $\mathcal{K} \subset u$. Через $\mathcal{K}$ обозначим все такие нормальные покрытия $\varphi_{\alpha} = \{\alpha_n : n \in N\} \subset u$, что $\alpha_1 = \alpha$, где $\alpha \in \mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{K}' = \cup\{u_{\alpha} : \alpha \in \mathcal{K}\}$. Тогда $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$. Пусть $\mathcal{K}''$ – всевозможные конечные внутренние пересечения покрытий из $\mathcal{K}$. Тогда, снова $|\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}''| = \mathcal{K}$. Теперь через В обозначим систему, состоящую из всех покрытий, в каждое из которых можно вписать покрытие из $\mathcal{K}''$. Тогда $|\mathfrak{B}| = |\mathcal{K}''| = |\mathcal{K}'| = |\mathcal{K}|$ и построению, всякий фильтр $\mathcal{F}$, обладающей свойством $\mathcal{F} \cap \beta \neq \varnothing$, $\forall \beta \neq \mathfrak{B}$, тем более обладает свойством $\mathcal{F} \cap \alpha \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathcal{K}$. Следовательно, система $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$ является полной, так как полной является система $\mathcal{K}$.

Предложение 4. *Пусть uX – равномерное пространство и $\mathcal{K} \subset u$ некоторое семейство покрытий. Если $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ база $\mathcal{K}$-фильтра Коши $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$ – псевдоравномерность порожденная семейством $\mathcal{K}$. Тогда семейство $\mathcal{F}' = \{\alpha(F) : F \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}, F \in \mathcal{F}'\}$ является базой минимального $\mathcal{K}$-фильтра Коши $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}$, содержащегося в $\mathcal{F}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству утверждения о минимальных фильтрах равномерного пространства ([5]), поэтому опускается.

Следствие 4.1. *Всякий минимальный $\mathcal{K}$-фильтр Коши является u-системой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству предложения 3.5. из [1], поэтому мы его опускаем.

В работе [2] при характеризации полноты и пополнения равномерного пространства из всех *u*-ультрафильтров выделялись *u*-ультрафильтры Коши. Ниже мы из всех *u*-ультрафильтров выделим *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтры Коши.

Определение 5. $\mathcal{K}$-фильтр Коши в равномерном пространства *uX*, являющийся *u*-системой, называется *u*-$\mathcal{K}$-*фильтром Коши*.

Определение 6. Максимальный *u*-$\mathcal{K}$-фильтр Коши будет называться *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтром Коши.

Следующие предложения являются аналогом предложений 5, 6 из [2] и доказательства их аналогичны, поэтому мы их опускаем.

Предложение 7. *Система ξ, являющаяся u-ультрафильтром, есть $\mathcal{K}$-фильтр Коши тогда и только тогда, когда ξ является u-$\mathcal{K}$-ультрафильтром Коши.*

Предложение 8. *Равномерное пространство uX $\mathcal{K}$ – полно тогда и только тогда, когда в нем сходится всякий u-$\mathcal{K}$-ультрафильтр Коши.*

Замечание 9. Отметим, что всякая точка прикосновения *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтра Коши является его пределом. Действительно пусть *x* точка прикосновения *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтра ξ и ξ_x – семейство всех открытых окрестностей точка *X*, которое является *u*-ультрафильтром (см.предложение 2.6. [1]). Тогда, так как $x \in \cap\{\overline{K} : K \in \xi\}$, для любого $U \in \xi_x$, $U \cap K \neq \varnothing$. Это означает, что $K \in \xi$ элемент ξ_x, т.е. $\xi \subseteq \xi_x$ и наоборот, каждое $U \in \xi_x$ элемент ξ, т.е. $\xi_x \subseteq \xi$. Итак, $\xi \subseteq \xi_x$. (Можно также использовать предложение 7.)

Через $\check{c}_u X$ обозначим часть $b_u X$ состоящую из всех *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтров Коши равномерного пространства *uX*, где $\mathfrak{B}_{\mathcal{K}} \subset u$ некоторая псевдоравномерность, порожденная семейством $\mathcal{K} \subset u$. Для каждого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$ положим $U_{\alpha} = \cup\{O_u\langle A\rangle : A \in \mathcal{K}\}$, где $O_u\langle A\rangle$ – оператор, определенный в работе [1].

Предложение 10. *Имеет место цепочка включений $X \subseteq \mu_u X \subseteq U_{\alpha} \subseteq b_u X$ для любого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $X \subseteq \mu_u X$ следует из теоремы 13 ([2]). Включение $\mu_u X \subseteq U_{\alpha}$ следует из того факта, что любой *u*-ультрафильтр Коши является всегда *u*-$\mathcal{K}$-ультрафильтром Коши, где $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$. Включения $U_{\alpha} \subseteq b_u X$ вытекают из определения U_{α}.

Теорема 11. *Имеет место равенство $\check{c}_u X = \cap\{U_{\alpha} : \alpha \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству теоремы 13 ([2]), заменой базы В равномерности *u* на псевдоравномерность $\mathcal{K} \in u$.

Теорема 12. *Семейство $\mathfrak{B}_{\check{c}} = \{\alpha_{\check{c}} : \alpha \in \mathfrak{B}\}$, где $\alpha_{\check{c}} = \{C_u X \cap O_u\langle A\rangle : A \in \alpha\}^c$ является базой некоторой равномерности $u_{\check{c}}$ на $\check{c}_u X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО производится аналогично доказательству теоремы 13 в работе [8].

Теорема 13. *Равномерное пространство $\check{c}_u X$ является $\check{\mathcal{K}}$ – полным равномерным расширением равномерного пространства uX, где $\check{\mathcal{K}} = \{\alpha_{\check{c}} : \alpha \in \mathcal{K}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как мы видели выше $X \subseteq \mu_u X \subseteq \check{c}_u X = b_u X$, следовательно, $\check{c}_u X$ – тихоновское пространство и $\overline{X} = \check{c}_u X$. Равномерность *u* продолжается до равномерности $u_{\check{c}}$ на $\check{c}_u X$. Итак, равномерное пространство $\check{c}_u X$

равномерное расширение uX. Покажем, что $\check{c}_u X$ является $\check{\mathcal{K}}$ – полным. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальный $\check{\mathcal{K}}$-фильтр Коши в равномерным пространстве $\check{c}_u X$. Тогда он является u-системой и $F \cap X \neq \varnothing$, для любого $F \in \mathfrak{F}$, так как $\langle F \rangle \neq \varnothing$ (см. предложение 4 и следствие 4.1). Система $\eta = \{F \cap X : F \in \mathfrak{F}\}$ является центрированной u-системой Коши, так как $\mathfrak{F} \cap \alpha_{\check{c}} \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathcal{K}}$. Пусть ξ-u-$\mathcal{K}$-ультрафильтр Коши, содержащий η, т.е. $\eta \in \xi$. Тогда, $\cap\{O_u\langle K\rangle : K \in \xi\} = \{\xi\}$, $\mathfrak{F} \subseteq \{O_u\langle K\rangle : K \in \xi\}$ и точка ξ является точкой прикосновения фильтра $\mathfrak{F}$ так как $O_u\langle K\rangle \cap F \neq \varnothing$, для любых $K \in \xi$ и $F \in \mathfrak{F}$. Итак, $\xi \in \cap\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\}$ (см. лемму 3.9 [1]). Тем самым доказано, что $\check{c}_u X$ – $\check{\mathcal{K}}$ – полное равномерное пространство.

Определение 14 ([5, 6]). $\mathcal{K}$ – полное равномерное пространство uX, где $|\mathcal{K}| \leq \aleph_0$, называется равномерно полным по Чеху.

Следствие 13.1. *Каждое равномерное пространство uX имеет равномерно полное по Чеху расширение* $\check{c}_u X$.

Следствие 13.2. *Каждое тихоновское пространство X выкладывается в полный по Чеху паракомпакт в качестве всюду плотного подпространства.*

Следствие 13.3. *Пространство uX равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда uX совпадают со своим равномерным расширением* $\check{c}_u X$.

Следствие 13.4. *Равномерно полное по Чеху расширение* $\check{c}_u X$ *равномерного пространство uX* G_δ *– расположено в* $S_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из равенства $\check{c}_u X = \cap\{u_\alpha : \alpha \in \mathcal{K}\}$, где $|\mathcal{K}| \leq \aleph_0$.

Следствие 13.5. *Равномерно полное по Чеху пространство uX* G_δ *– расположено в* $S_u X$.

Следствие 13.5 имеет обращение, т.е. если равномерное пространство uX G_δ расположено в $S_u X$, тогда uX равномерно полно по Чеху. Для доказательства этого факта нам потребуется дополнительная информация, которую мы приведем ниже.

Пусть (X, d) – псевдометрическое пространство. Положим “$x \sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x,y)=0$”. Отношение “$\sim$” является отношением эквивалентности. Множество $Y = X/\sim$ наделяется метрикой $\rho(\eta_1, \eta_2) = d(\pi^{-1}(y_1), \pi^{-1}(y_2))$ для любых $y_1, y_2 \in Y$, где $\pi : X \to Y = X/\sim$ – естественная проекция. Оказывается $\rho(y_1, y_2) = d(x,z)$ для любых $x \in \pi^{-1}(y_1)$ и $z \in \pi^{-1}(y_2)$ и имеет место следующая теорема.

Теорема 14 (4.15 [8]). *Пусть (X, d) – псевдометрическое пространство и $Y = X/\sim$, где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $d(x,y)=0$. Тогда $\rho(y_1, y_2) = d(\pi^{-1}(y_1), \pi^{-1}(y_2))$ – метрика на Y для любых $y_1, y_2 \in Y$, где $\pi : X \to Y$ – естественная проекция. Отображение $\pi : X \to Y$ является факторным топологически и изометрией метрического пространства (X, d) на метрическое пространство (Y, ρ).*

Следствие 14.1. *Для любого $\varepsilon>0$ имеем $\pi(O_\varepsilon(x)) = O_\varepsilon(y)$ и $\pi^{-1}(O_\varepsilon(y)) = O_\varepsilon(x)$, где $y = \pi(x)$ и $O_\varepsilon(x) = \{x' \in X : d(x,x') < \varepsilon\}$ и $O_\varepsilon(y) = \{y' \in Y : \rho(y,y') < \varepsilon\}$.*

Теорема 15 ([5] лемма 0.3.2 [3]). *Пусть $\{\alpha_n : n \in N\}$ – последовательность покрытий множества X такая, что α_n звездно вписано в α_n при каждом $n \in N$. Тогда на множестве X существует такая псевдометрика ρ, что выполнено условие:*

$$\alpha_{n+1}(x) \subset \{y : \rho(x,y) < 2^{-(n+1)}\} \subset \alpha_n(x) \quad (*)$$

для любого элемента $x \in X$ и каждого $n \in N$.

Теперь из теорем 14, 15 выводится, на наш взгляд, очень важная теорема, характеризирующая базу равномерности в терминах равномерно конуль (нуль)-множеств. Напомним, что покрытие называется равномерно открытым (замкнутым), если оно состоит из равномерно конуль (нуль)-множеств.

Теорема 16. *Каждая равномерность u на тихоновском пространстве X обладает базой, состоящей из всех локально конечных равномерно открытых (замкнутых) покрытий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – равномерность на тихоновском пространстве X и $\alpha \in M$ – произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такая последовательность $\{\alpha_n : n \in N\}$ равномерных покрытий, что α_1 звездно вписано в α и α_{n+1} звездно вписано в α_n для каждого $n \in N$. Тогда по теореме 15 существует псевдометрика ρ на X со свойством (*), т.е. $\alpha_{n+1}(x) \subset O_{2^{-(n+1)}}(x) \subset \alpha_n(x)$, где $O_{2^{-(n+1)}}(x) : \{z : \rho(x,z) < 2^{-(n+1)}\}$ для всех $x \in X$ и всех $n \in N$. Ясно, что при n=1 имеем покрытие $\beta = \{O_{4^{-1}}(x) : x \in X\}$, вписанное в α. По теореме 14 имеем равномерно непрерывное отображение $f : uX \to (Y, d)$, $f = \pi \circ 1$, где $1 : uX \to (X, \rho)$ тождественное отображение и $\pi : (X, \rho) \to (Y, d)$

естественная проекция, как в теореме 14. Ясно, что $f^{-1}(O_{4^{-1}}(y)) = O_{4^{-1}}(x)$, где $y = f(x)$ (следствие 14.1). Покрытие $\beta = \{O_{4^{-1}}(y) : y \in Y\}$ – открытое покрытие метрического пространства (*Y*, *d*). Метрическое пространство (*Y*, *d*) – паракомпактно ([4, 8]), поэтому в открытое покрытие β можно вписать открытое локально конечное покрытие γ, а в γ можно вписать замкнутое локально конечное покрытие γ' ([4]). Теперь легко доказать, что покрытия $f^{-1}(\gamma)$ и $f^{-1}(\gamma')$ локально конечны, $f^{-1}(\gamma)$ – равномерно открыто ([7]), а покрытие $f^{-1}(\gamma')$ – равномерно замкнуто ([7]). Причем $f^{-1}(\gamma)$ вписано в покрытие $\{\alpha_1(x) : x \in X\}$, а $f^{-1}(\gamma')$ вписано в $f^{-1}(\gamma)$, следовательно, получаем искомую вписанность покрытий $f^{-1}(\gamma')$ в $f^{-1}(\gamma)$, а $f^{-1}(\gamma)$ в α. В силу произвольности α получаем, что все локально конечные равномерно открытые (замкнутые) покрытия образуют базу равномерности *u*.

Предложение 17. *Пусть равномерное пространство uX G_δ – расположено в S_uX. Тогда uX равномерно полно по Чеху.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \cap\{U_i : i \in N\}$, где U_i открыто в S_uX для всех $i \in N$. По теореме 3.8 ([1]), имеем $U_i = \cup\{O_u\langle A_i\rangle : O_n\langle A_i\rangle \in \langle Q\rangle\}$, $i \in N$, где A_i – можно считать равномерно конульмножеством (по теореме 16). Для каждого $i \in N$ подмножества U_i – локально компактно, как открытое подпространство бикомпакта S_uX. Следовательно, у каждой точки $p \in s_uX$ существует такая окрестность V_p, что $\overline{V_p}$ компактно в S_uX. Пусть α_i такое семейство, что $U_i = \cup\{O_u\langle A_i\rangle : A_i \in \alpha_i\}$. Тогда α_i покрытие *X*, так как $X \subset U_i$ для каждого $i \in N$. Для каждой точки $x \in X$ существует окрестность $O_x = V_x \cap X$, пересекающаяся с конечным числом элементов покрытия α_i. Это следует из свойства (c) предложения 2.12 ([1]). Итак, α_i – локально конечное равномерно открытое покрытие для каждого $i \in N$. Система $\mathcal{K} = \{\alpha_i : i \in N\}$ счетна $X = \cap\{U_i : i \in N\}$, где $U_i = \cup\{O_u\langle A_i\rangle : A_i \in \alpha_i\}$, следовательно, по лемме 2 и теореме 13, *uX*-$\mathcal{K}$ – полно, а так как $|\mathcal{K}| \le \aleph_0$, тогда *uX* – равномерно полно по Чеху.

Теперь объединяя следствие 13.5 и предложение 17 сформируем теорему – характеристику равномерно полных по Чеху равномерных пространств в своем Самуэловском расширении.

Теорема 18. *Следствие условия для равномерного пространства uX равносильны:*

(1) uX равномерно полно по Чеху.

(2) uX G_δ – расположено в S_uX.

(3) S_uX / X σ – компактно в S_uX.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из следствия 13.5.

(2) $\Rightarrow$ (1). Следует из предложения 17.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $X = \cap\{U_i : i \in N\}$, где U_i – открыто в S_uX. Тогда по закону де-Моргана $s_uX \setminus X = \cup\{s_uX \setminus U_i : i \in N\}$ и $s_uX \setminus U_i$ компактно в S_uX для каждого $i \in N$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $s_uX \setminus X = \cup\{K_i : i \in N\}$, где K_i компактно в S_uX для любого $i \in N$. Итак, *X* G_δ – расположено в S_uX. Теорема 18 доказана.

Литература

1. *Чекеев А.А., Абдраимова М.А.* О новом подходе к построению бикомпактных расширений равномерных пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2009 (в печати).
2. *Чекеев А.А., Абдраимова М.А.* О внешней характеристике полноты и пополнения равномерных пространств // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. – 2009 (в печати).
3. *Isbell J.R.* Uniform spaces. – Providence, 1964.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.
5. *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
6. *Wilhelm M.* Criteria of openness for relations// Fund. Math. – 1981. – V. 124. – P. 219–228.
7. *Charalambous M.G.* Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London, 1971.
8. *Келли.* Общая топология. – М.: Наука, 1981.