УДК 514.75 (575.2) (04)

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ВЫРОЖДЕННОГО ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТЬЮ ФРЕНЕ

Г. Матиева, А.Б. Ташпулатов

Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы ортогональная проекция любой линии $\ell \subset E_4$ в E_3 была двойной линией вырожденного частичного отображения, порождаемого заданной циклической, голономной сетью Френе.

Ключевые слова: двойная линия; вырожденное частичное отображение; циклическая сеть Френе.

В области Ω евклидова пространства E_4 задана циклическая сеть Френе $\tilde{\mathrm{E}}_4$. Подвижной ортонормированный репер $\Re_1 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ в области Ω выбран так, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1 заданной сети $\tilde{\mathrm{E}}_4$. Деривационные формулы репера $\Re_1$ имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω_i^k удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \; \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

Поскольку репер $\Re_1$ построен на касательных к линиям сети $\tilde{\mathrm{E}}_4$, формы ω_i^k становятся главными [2], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i.$$

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (3) и применяя лемму Картана, получим:

$$d\Lambda_{ik}^j = \left(\Lambda_{ikm}^j + \Lambda_{i\ell}^j \Lambda_{km}^\ell + \Lambda_{\ell k}^j \Lambda_{im}^\ell\right)\omega^m. \tag{4}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ik}^j, \Lambda_{ikm}^j\right\}$ определяет геометрический объект второго порядка.

Псевдофокус [3] $F_i^j \; (i \neq j)$ касательной к линиям ω^i циклической сети Σ_4 Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - \left(1/\Lambda_{ij}^j\right)\vec{e}_i = \vec{X} + \left(1/\Lambda_{jj}^i\right)\vec{e}_i. \tag{5}$$

Так как заданная сеть $\tilde{\Sigma}_4$ является циклической сетью Френе (т.е. реперы $\Re_1 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\right)$ $\Re_2 = \left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1\right)$, $\Re_3 = \left(X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$, $\Re_4 = \left(X, \vec{e}_4, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ являются реперами Френе для линий ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 соответственно) [4], на каждой касательной к линиям сети Френе Σ_4 существует только по одному псевдофокусу $F_1^4 \in \left(X, \vec{e}_1\right)$, $F_2^1 \in \left(X, \vec{e}_2\right)$, $F_3^2 \in \left(X, \vec{e}_3\right)$, $F_4^3 \in \left(X, \vec{e}_4\right)$, а остальные являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства $\overline{E}_4$.

Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^4 описывает свою область $\Omega_1^4 \in E_4$. Получим частичное отображение $f:\ \Omega \to \Omega_1^4$ такое, что $f\left(X\right) = F_1^4$.

Продифференцируя обычным образом равенство (4) получим:

$$d\vec{F}_1^4 = \omega^i \vec{e}_i + \frac{B_{14m}^4 \omega^m}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^k \omega^m}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_k = \left[\vec{e}_1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^k}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_k\right] \omega^1 +$$
$$+\left[\vec{e}_2 + \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^k}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_k\right] \omega^2 + \left[\vec{e}_3 + \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^k}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_k\right] \omega^3 + \qquad (6)$$
$$+\left[\vec{e}_4 + \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^k}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_k\right] \omega^4$$

Введем обозначения:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_2,\ \vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^4}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_4,$$
$$\vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{13}^4}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_4,\ \vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_2, \qquad (7)$$

где $B_{14m}^4 = \Lambda_{14m}^j + \Lambda_{1\ell}^j \Lambda_{4m}^\ell + \Lambda_{\ell 4}^j \Lambda_{1m}^\ell$.

Рассмотрим случай, когда циклическая сеть Френе Σ_4 голономная, т.е. $\Lambda_{ij}^k = 0$ $(i, j, k -$ различны). Тогда векторы $\vec{b}_i$ имеют вид:

$$\vec{b}_1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right] \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4} \vec{e}_2,\ \vec{b}_2 = \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad (8)$$
$$\vec{b}_3 = \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1 + \vec{e}_3,\ \vec{b}_4 = \frac{B_{144}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2} \vec{e}_1.$$

Видно, что $\vec{b}_4, \vec{e}_1$ – коллинеарны, $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ – линейно независимы. Следовательно, область Ω_1^4 является трехмерным, значит, отображение $f: \Omega \to \Omega_1^4$ является вырожденным.

Линии ℓ, $\overline{\ell} = f\left(\ell\right)$ называются двойными линиями отображения *f*, если касательные к ним, взятые в соответствующих точках X и $f\left(X\right)$ пересекаются, либо параллельны [5].

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF_1^4} = -\left(1/\Lambda_{14}^4\right)\vec{e}_1$, где $f\left(\vec{e}_1\right) = \vec{b}_1$. Учитывая (6), получаем что $\left(\vec{e}_1, \vec{b}_1, \overrightarrow{XF_1^4}\right) = 0$, т.е. эти векторы компланарны, следовательно линия ω^1 циклической, голономной сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ является двойной линией вырожденного отображения $f : \Omega \to \Omega_1^4$.

Аналогичным образом можно убедиться в том, что линии ω^2 и ω^3 данной циклической, голономной сети Френе $\tilde{\Sigma}_4$ являются двойными линиями отображения *f*.

Рассмотрим линию $\ell \subset E_3 = \left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ и ее касательный вектор $\vec{\ell} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3$. Пусть $\overline{\ell} = f\left(\ell\right)$ образ этой линии в рассматриваемом отображении. Тогда ее касательный вектор имеет вид: $f\left(\vec{\ell}\right) = \ell^1\vec{b}_1 + \ell^2\vec{b}_2 + \ell^3\vec{b}_3$.

Учитывая (6), (7), (8), отсюда получим:

$$f\left(\vec{\ell}\right) = \left(\left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\ell^1 + \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\ell^2 + \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\ell^3\right)\vec{e}_1 + \left(-\frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\ell^1 + \ell^2\right)\vec{e}_2 + \ell^3\vec{e}_3.$$

Введем обозначения:

$$\overline{\ell}^1 = \left[1 + \frac{B_{141}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\right]\ell^1 + \frac{B_{142}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\ell^2 + \frac{B_{143}^4}{\left(\Lambda_{14}^4\right)^2}\ell^3,$$

$$\overline{\ell}^2 = -\frac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\ell^1 + \ell^2, \quad \overline{\ell}^3 = \ell^3. \quad (9)$$

Тогда имеем: $f\left(\vec{\ell}\right) = \overline{\ell}^1\vec{e}_1 + \overline{\ell}^2\vec{e}_2 + \overline{\ell}^3\vec{e}_3$.

Найдем смешанное произведение трех векторов $\vec{\ell}$, $f\left(\vec{\ell}\right)$, $\overrightarrow{XF_1^4}$:

$$\left(\vec{f}, f\left(\vec{\ell}\right), \overrightarrow{XF_1^4}\right) = \left(\ell^2\ell^3 - \ell^3\overline{\ell}^2\right)/\Lambda_{14}^4.$$

Эти векторы компланарны тогда и только тогда, когда $\ell^2\ell^3 - \ell^3\overline{\ell}^2 = 0$, т.е. когда а) $\ell^2 = \overline{\ell}^2$ либо б) $\ell^3 = 0$. Отсюда, учитывая первое равенство формулы (9), имеем:

а) $\dfrac{\Lambda_{11}^2}{\Lambda_{14}^4}\ell' = 0$. Так как $\omega(R,z,M) = \iint\limits_{\partial_z(M)} \dfrac{dpdq}{R(p,q)}$, отсюда получим $\ell^1 = 0$.

б) $\vec{f}\left(\vec{\ell}\right) = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2$, $\vec{\ell} = \ell^1\vec{e}_1 + \ell^2\vec{e}_2$,

Обратно, если $\ell^1 = 0$ или $\ell^3 = 0$, то векторы $\vec{\ell}$, $f\left(\vec{\ell}\right)$, $\overrightarrow{XF_1^4}$ – компланарны.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Линии $\ell \subset E_3, f\left(\ell\right) = \ell'$ являются двойными линиями вырожденного отображения $f : \Omega \to \Omega_1^4$ тогда и только тогда, когда $\ell^1 = 0$ либо $\ell^3 = 0$ (т.е. ее касательный вектор $\vec{\ell}$ лежит на плоскости $\left(X, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ либо на плоскости $\left(X, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$).

Литература

1. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
2. *Базылев В.Т.* Сети на многообразиях // Труды геометр. семинара. – М.: АНСССР, ВИНИТИ, 1974. – Т. 6. – С. 189–205.
3. *Базылев В.Т.* О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сборник. – 1966. – Вып. VI. – №4. – С. 475–491.

4. *Матиева Г*. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства. – Ош: ОшГУ; Изд. центр “Билим”, 2003. – 151 с.