УДК 515.12 (575.2) (04)

СУПЕРПАРАКОМПАКТНЫЕ ПЕРИСТЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Д.К. Мусаев, И.Н. Тиллабоев

Приведена характеристика суперпаракомпактных полных по Чеху пространств при помощи бикомпактных отображений и вложений.

Ключевые слова: суперпаркомпактность; бикомпактное отображение; вложение.

Под пространством понимается топологическое пространство, под отображением – непрерывное отображение пространств.

Напомним основные для этой работы определения и некоторые необходимые понятия.

Определение 1 [1]. а) звездно-конечное открытое покрытие пространства называется конечнокомпонентным, если все его компоненты сцепленности конечны; б) пространство называется суперпаракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать конечнокомпонентное покрытие; в) хаусдорфовы суперпаракомпактные пространства называются суперпаракомпактами; г) пусть X – произвольное множество и $\gamma = \{M\}$ – произвольное подмножество множества X, тогда через $\gamma(A)$ обозначим теоретико-множественную сумму всех элементов γ, пересекающихся с A. Множество $\gamma(A)$ называется звездой множества A относительно системы γ. Если при этом A состоит из единственной точки $x \in X$, то пишут $\gamma(x)$ и говорят о звезде точки x относительно системы γ.

Определение 2. а) тихоновское пространство называется [2] полным по Чеху, если оно является множеством типа G_δ в некотором содержащем его бикомпакте; б) покрытие ω пространства X имеет кратность $\leq k$ [2], если всякая точка пространства X принадлежит не более чем k элементам покрытия ω. В частности, однократные покрытия пространства X – это в точности дизъюнктные покрытия пространства X; в) для пространства X будем считать $\dim^* X = 0 (\dim X = 0)$, если во всякое его (конечное) открытое покрытие можно вписать однократное открытое покрытие; г) пространство X называется индуктивно-нульмерным [2], т.е. $indX = 0$, если оно имеет базу из открыто-замкнутых множеств; д) бикомпактным называется [3] совершенное, т.е. замкнутое и послойно-бикомпактное отображение; ж) отображение $f : X \to Y$ называется монотонным [4], если для любой точки множество $f^{-1}y$ связано.

Теорема 1 [5]. Для отображения $f : X \to Y$ тихоновского пространства X в метризуемое пространство Z существуют: метризуемое пространство Y и отображения $g : X \to Y$ и $h : Y \to Z$ такие, что $f = hg$, $\dim Y \leq \dim X$, $\omega Y \leq Z$.

Теорема 2 [6]. Если регулярное пространство X является прообразом паракомпактного пространства Y при совершенном отображении, то само X паракомпактно.

Одна из интересных проблем, поставленных П.С. Александровым [7], заключалась в том, какие же пространства могут быть совершенно (≡бикомпактно) отображены на метрические пространства? Прообраз метризуемого пространства при бикомпактном (≡совершенном) отображении не обязан быть метризуемым – достаточно рассмотреть отображение неметризуемого бикомпакта в точку. Согласно теореме 2, необходимым свойством таких пространств является их паракомпактность.

Эта проблема П.С. Александрова особый интерес вызвала после того, как З. Фролик [8] доказал, что необходимым и достаточным условием того, чтобы полное в смысле Чеха пространство совершенно отображалось на полное метрическое пространство, является его паракомпактность.

Для решения проблемы П.С. Александрова А.В. Архангельским (см. [6]) были введены понятия перистых пространств.

Определение 3 [6]. а) пусть $X \subseteq Y$, X и Y – топологические пространства. Система $\phi = \{\gamma_n\}$ покрытий пространства X открытыми в пространстве Y множествами называется оперением X в Y, если для любой точки $x \in X$ имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x) \subseteq X$; б) тихоновское пространство X называется перистым, если оно обладает счетным оперением в своем расширении Стоуна-Чеха βX.

Известно (см. [6]), что класс перистых пространств достаточно широк и он содержит в себе: а) бикомпакты; б) локально бикомпактные хаусдорфовы пространства; в) полные в смысле Чеха пространства; г) метрические пространства.

Поскольку для (О-С)-конечных (см. [10]), в частности, (О-С)-компактных пространств, суперпаракомпактность равносильна его бикомпактности, то для (О-С)-конечных суперпаракомпактных хаусдорфовых пространств имеет место следующее

Предложение 1. (О-С)-конечное, в частности (О-С)-компактный суперпаракомпакт, является перистым пространством.

Так как любые псевдокомпактные [4] , в частности, счетно компактные пространства, являются (О-С)-конечными пространствами, то из предложения 1 вытекает

Предложение 2. Локально связное K – компонентное (см. [1]), в частности, суперпаракомпактное хаусдорфово пространство, является перистым.

Доказательство. Локально связное пространство является [10] дискретной суммой своих компонент. Поскольку X есть K – компонентное пространство, то все его компоненты бикомпактны. Поэтому пространство X является дискретной суммой бикомпактов. Следовательно, пространство X локально бикомпактно и, согласно теореме 2.3 в [6], оно является перистым. Предложение доказано.

Б.А. Пасынковым был поставлен вопрос: какие характеризации суперпаракомпактных перистых простраств, в частности, суперпаракомпактных полных по Чеху перистых пространств, могут существовать при помощи бикомпактных отображений и вложений?

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 3. Для хаусдорфова пространства *X* равносильны следующие утверждения: а) *X* суперпаракомпактно и полно в смысле Чеха (является перистым пространством); б) *X* бикомпактно [и монотонно] отображается на нульмерный в смысле $\dim$ полный по Чеху паракомпакт (паракомпактное перистое пространство); в) *X* бикомпактно отображается на нульмерное в смысле $\dim$ полно метризуемое (метризуемое) пространство; г) *X* замкнуто вкладывается в произведение нульмерного в смысле $\dim$ полно метризуемого (метризуемого) пространства на некоторый тихоновский куб; д) *X* замкнуто вкладывается в произведение нульмерного в смысле $\dim$ и полного по Чеху паракомпакта (паракомпактного перистого пространства) на некоторый тихоновский куб.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Согласно теореме 3, естественное фактор-отображение *p* пространства *X* на пространство $X/_C$ разбиения *X* на его компоненты бикомпактно и монотонно. При этом $X/_C$ есть паракомпакт и $\dim X/_C = 0$. Поскольку полнота по Чеху и свойство быть перистым пространством переходит [4] при бикомпактных отображениях от прообраза к образу, то пространство $X/_C$ является полным по Чеху (перистым) пространством. б)$\Rightarrow$в). Пусть p есть бикомпактное отображение пространства X на нульмерный в смысле $\dim$ полный по Чеху паракомпакт (паракомпактное перистое пространство) X_0. Тогда существует (см. [6,8]) бикомпактное отображение *f* пространства X_0 на полно метризуемое (метризуемое) пространство *Z*. Для отображения *f*, согласно теореме 1, существует такое метрическое пространство *Y* и такие отображения $\phi : X_0 \to Y$ и $g : Y \to Z$, что $f = g \cdot \phi$, отображение g – бикомпактно, $\dim Y \le \dim X_0$. Так как $\dim X_0 = 0$, то и $\dim Y = 0$. Поскольку отображения *f* и *g* бикомпактны, а пространство *Y* хаусдорфово, то отображение φ бикомпактно [5] и метрическое пространство Y является полно метризуемым, если таковым является пространство *Z*. Композиция $h = \phi \cdot p : X \to Y$ бикомпактных отображений ϕ и *p* является [4] бикомпактным и пространство $h(X)$, как замкнутое подмножество нульмерного в смысле $\dim$ полно метризуемого (метризуемого) пространства *Y*, полно метризуемо (метризуемо) и нульмерно в смысле $\dim$.

в)$\to$г). Пусть пространство *X* бикомпактно отображается на нульмерное в смысле $\dim$ полно метризуемое (метризуемое) пространство X_0. Поскольку пространство *X* тихоновское, то оно гомеоморфно подмножеству некоторого тихоновского куба I^τ. Тогда пространство **X** замкнуто вкладывается в произведение $X_0 \times I^\delta$ нульмерного в смысле $\dim$ полно метризуемого (метризуемого) пространства X_0 на тихоновский куб I^τ. Следование г) $\Rightarrow$д) очевидно. д)$\Rightarrow$а). Пусть теперь пространство *X* замкнуто вкладывается в произведение $X_0 \times I^\tau$ нульмерного в смысле $\dim$ полного по Чеху (перистого) пространства X_0 на некоторый тихоновский куб I^δ. Известно [4], что произведение $X_0 \times I^\delta$ является полным по Чеху паракомпактным (паракомпактным перистым) пространством. По следствию 1 [9] произведение $X_0 \times I^\tau$ суперпаракомпактно. Поскольку суперпаракомпактность и полнота по Чеху (и перистость) монотонны (см. [9], [4]) по замкнутым подмножествам, то пространство *X* полно по Чеху (является перистым пространством) и суперпаракомпактно. Теорема доказана.

Литература

1. *Мусаев Д.К.* Диадические отображения и диадические суперпаракомпактные топологические группы // Сибир. мат. журнал. – 2005. – Т. 46. – №4. – С. 851–859.
2. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973.
3. *Вайнштейн И.А.* О замкнутых отображениях метрических пространств // Докл.АН СССР. – 1947. – Т. 57. – № 4. – С. 319–321.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.
5. *Пасынков Б.А.* Факторизационные теоремы в теории размерности // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36. – Вып. 3 (219). – С. 147–173.

6. *Архангельский А.В*. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально-бикомпактные пространства // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 4. – С. 751–754.
7. *Александров П.С*. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings // Proc. Symp., Pregue, September, 1961.
8. *Frolik Z*. On the topological product of paracompact spaces // Bull. Acad. Polon., sci., ser. math. – 1960. – V. 8. – №11–12. – P. 747–750.
9. *Мусаев Д.К.* О суперпаракомпактных топологических пространствах // ДАН УзССР. – 1983. – №2. – С. 5–6.
10. *Мусаев Д.К., Пасынков Б.А.* О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. – Ташкент: Фан, 1994.