

## ЦИКЛИЧЕСКАЯ СЕТЬ ФРЕНЕ В $N$ -МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $E_N$

*Т.М. Папиева*

---

Найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная сеть Френе являлась циклической сетью Френе.

*Ключевые слова:* сеть Френе; циклическая сеть Френе.

В области  $\Omega$   $n$ -мерного евклидова пространства  $E_n$  задано семейство гладких линий так, что через каждую точку  $X \in \Omega$  проходит одна линия заданного семейства. Подвижной ортонормирован-

---

ный репер  $\mathfrak{R} = (X, \vec{e}_i)$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ ) в области  $\Omega$  выбран так, чтобы он был репером Френе [1] для линии  $\omega^1$  заданного семейства. Девивационные формулы репера  $\mathfrak{R}$  имеют вид:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \quad (1)$$

Формы  $\omega^i, \omega_i^k$  удовлетворяют структурным уравнениям евклидова пространства:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \quad (2)$$

Интегральные линии векторных полей  $\vec{e}_i$  образуют сеть Френе  $\Sigma_n$  для линии  $\omega^1$  заданного семейства. Поскольку репер  $\mathfrak{R}$  построен на касательных к линиям сети  $\Sigma_n$  Френе, формы  $\omega_i^k$  становятся главными [2], т.е.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \quad (3)$$

В силу последнего равенства формулы (2) имеем:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i.$$

Формулы Френе для линии  $\omega^1$  заданного семейства имеют вид:

$$d_1 \vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1 \vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1 \vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d_1 \vec{e}_{n-1} = \Lambda_{n-1,1}^{n-2} \vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^n \vec{e}_n,$$

$$d_1 \vec{e}_n = \Lambda_{n1}^{n-1} \vec{e}_{n-1}.$$

Так как  $\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i$  формулы Френе примут следующий вид:

$$d_1 \vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1 \vec{e}_2 = -\Lambda_{11}^2 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1 \vec{e}_3 = -\Lambda_{21}^3 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d_1 \vec{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,1}^{n-1} \vec{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,1}^n \vec{e}_n,$$

$$d_1 \vec{e}_n = -\Lambda_{n-1,1}^n \vec{e}_{n-1},$$

где  $d_1$  – символ дифференцирования вдоль линии  $\omega^1$ ,  $k_i^{(1)} = \Lambda_{i1}^{i+1}$  –  $i$ -ая кривизна линии  $\omega^1$  заданного семейства:

$$\Lambda_{i1}^j = 0 \quad \left( i < j, i = 1, 2, \dots, n-2; j = 3, 4, \dots, i+1, \dots, n \right), \quad (5)$$

$$\Lambda_{i1}^{i+1} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \quad (6)$$

(здесь знаком  $\wedge$  сверху отмечены не принимаемые индексом  $j$  значения).

Псевдофокус [3]  $F_i^j$  ( $i \neq j$ ) касательной к линии  $\omega^i$  сети  $\Sigma_n$  Френе определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}_i^j = \vec{X} - (1/\Lambda_{ij}^j) \vec{e}_i = \vec{X} + (1/\Lambda_{jj}^i) \vec{e}_i. \quad (7)$$

В общем случае на каждой касательной  $(X, \vec{e}_i)$  существуют псевдофокусы в количестве  $n-1$ . Но в силу (5), (6), (7) на каждой из касательных  $(X, \vec{e}_3), (X, \vec{e}_4), \dots, (X, \vec{e}_n)$  имеем псевдофокусов в

количестве  $n - 2$ , а точки  $F_3^1 \in (X, \bar{e}_3)$ ,  $F_4^1 \in (X, \bar{e}_4)$ , ...,  $F_n^1 \in (X, \bar{e}_n)$  являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства  $\bar{E}_n$ .

Пусть сеть  $\Sigma_n$  является циклической сетью Френе [4]. Тогда репер  $\mathfrak{R}_2 = (X, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_1)$  является репером Френе для линии  $\omega^2$  сети  $\Sigma_n$ , репер  $\mathfrak{R}_3 = (X, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$  является репером Френе для линии  $\omega^3$  сети  $\Sigma_n$ , и т.д., репер  $\mathfrak{R}_n = (X, \bar{e}_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-1})$  является репером Френе для линии  $\omega^n$  сети  $\Sigma_n$ . Формулы Френе для линии  $\omega^2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} d_2 \bar{e}_2 &= \Lambda_{22}^3 \bar{e}_3, \\ d_2 \bar{e}_3 &= -\Lambda_{22}^3 \bar{e}_2 + \Lambda_{32}^4 \bar{e}_4, \\ d_2 \bar{e}_4 &= -\Lambda_{32}^4 \bar{e}_3 + \Lambda_{42}^5 \bar{e}_5, \\ &\dots \dots \dots \\ d_2 \bar{e}_n &= -\Lambda_{n-1,2}^n \bar{e}_{n-1} + \Lambda_{n2}^1 \bar{e}_1, \\ d_2 \bar{e}_1 &= -\Lambda_{n2}^1 \bar{e}_n, \end{aligned}$$

где  $d_2$  – символ дифференцирования вдоль линии  $\omega^2$ ,  $K_{\bar{i}}^{(2)} = \Lambda_{\bar{i}2}^{\bar{i}+1} - \bar{i}$  -тая кривизна этой линии ( $\bar{i} = 2, 3, \dots, n-1, n$ ; когда  $\bar{i} = n$ , индекс  $\bar{i} + 1$  условно обозначим через 1),

$$\Lambda_{\bar{i}2}^{\bar{i}+1} \neq 0, \tag{8}$$

$$\Lambda_{\bar{i}2}^j = 0 \left( \bar{i} < j, \bar{i} = 2, 3, \dots, n-1, n; j = 4, \dots, \hat{i} + 1, \dots, n \right). \tag{9}$$

Из (8), (9), (7) следует, что псевдофокусы  $F_1^2 \in (X, \bar{e}_1)$ ,  $F_4^2 \in (X, \bar{e}_4)$ , ...,  $F_n^2 \in (X, \bar{e}_n)$  являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства  $\bar{E}_n$ .

Напишем формулы Френе для линии  $\omega^3$  сети  $\Sigma_n$ :

$$\begin{aligned} d_3 \bar{e}_3 &= \Lambda_{33}^4 \bar{e}_4, \\ d_3 \bar{e}_4 &= -\Lambda_{33}^4 \bar{e}_3 + \Lambda_{43}^5 \bar{e}_5, \\ d_3 \bar{e}_5 &= -\Lambda_{43}^5 \bar{e}_4 + \Lambda_{53}^6 \bar{e}_6, \\ &\dots \dots \dots \\ d_3 \bar{e}_{n-1} &= -\Lambda_{n-2,3}^{n-1} \bar{e}_{n-2} + \Lambda_{n-1,3}^n \bar{e}_n, \\ d_3 \bar{e}_n &= -\Lambda_{n-1,3}^n \bar{e}_{n-1} + \Lambda_{n3}^1 \bar{e}_1, \\ d_3 \bar{e}_1 &= -\Lambda_{n3}^1 \bar{e}_n + \Lambda_{13}^2 \bar{e}_2, \\ d_3 \bar{e}_2 &= -\Lambda_{13}^2 \bar{e}_1, \end{aligned}$$

где  $d_3$  – символ дифференцирования вдоль линии  $\omega^3$ ,  $K_{\tilde{i}}^{(3)} = \Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} - \tilde{i}$  -тая кривизна этой линии ( $\tilde{i} = 3, 4, \dots, n, n + 1$ ; когда  $\tilde{i} = n$ , индекс  $\tilde{i} + 1$  условно обозначим через 1, когда  $\tilde{i} = n + 1$ , индекс  $\tilde{i} = n + 2$  условно обозначим через 2)

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^{\tilde{i}+1} \neq 0, \tag{10}$$

$$\Lambda_{\tilde{i}3}^j = 0 \left( j = 1, 2, 3, \dots, n; \right). \tag{11}$$

Из (7), (10), (11) следует, что псевдофокусы  $F_1^3 \in (X, \bar{e}_1)$ ,  $F_2^3 \in (X, \bar{e}_2)$ ,  $F_3^3 \in (X, \bar{e}_3)$ , ...,  $F_n^3 \in (X, \bar{e}_n)$  являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства  $\bar{E}_n$ .

Формулы Френе для линии  $\omega^n$  сети  $\Sigma_n$  имеют вид:

$$d_n \bar{e}_n = \Lambda_{nn}^1 \bar{e}_1,$$

$$d_n \bar{e}_1 = -\Lambda_{nn}^1 \bar{e}_n + \Lambda_{1n}^2 \bar{e}_2,$$

$$d_n \bar{e}_2 = -\Lambda_{1n}^2 \bar{e}_1 + \Lambda_{2n}^3 \bar{e}_3,$$

.....

$$d_n \bar{e}_{n-2} = -\Lambda_{n-3,n}^{n-2} \bar{e}_{n-3} + \Lambda_{n-2,n}^{n-1} \bar{e}_{n-1},$$

$$d_n \bar{e}_{n-1} = -\Lambda_{n-2,n}^{n-1} \bar{e}_{n-2},$$

где  $\Lambda_{nn}^1 = -\Lambda_{1n}^n$  – первая кривизна линии  $\omega^n$  сети  $\Sigma_n$ ,  $K_p^{(n)} = \Lambda_{p-1,n}^p$  –  $p$ -тая кривизна этой линии ( $p = 2, 3, \dots, n-2$ ),

$$\Lambda_{p-1,n}^p \neq 0, \tag{12}$$

$$\Lambda_{p-1,n}^j = 0 \quad (p < j; p = 2, \dots, n-2; j = 3, \dots, n). \tag{13}$$

Из (7), (12), (13) следует, что псевдофокусы  $F_2^n \in (X, \bar{e}_2)$ ,  $F_3^n \in (X, \bar{e}_3)$ ,  $F_4^n \in (X, \bar{e}_4)$ , ...,  $F_{n-1}^n \in (X, \bar{e}_{n-1})$  являются бесконечно удаленными точками расширенного евклидова пространства  $\bar{E}_n$ .

Из вышеизложенного следует

**Теорема.** Сеть  $\Sigma_n$  Френе для линии  $\omega^1$  заданного семейства является циклической сетью Френе тогда и только тогда, когда выполнены условия: (5), (6), (8), (9), ..., (12), (13).

**Литература**

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.
2. Базылев В.Т. Сети на многообразиях // Труды геометрического семинара. – М.: АН СССР, ВИНТИ. – 1974. – №6. – С. 189–205.
3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский математический сборник. – 1966. – Вып. VI. – №4. – С. 475–491.
4. Матиева Г. Геометрия частичных отображений, сетей и распределений евклидова пространства. – Ош: ОшГУ; Изд. центр “Билим”, 2003. – 151 с.