УДК 517.956 (575.2) (04)

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

И.К. Карасаев

Строится фундаментальная система решений уравнения Хилла.

Ключевые слова: уравнения Хилла; матрица; конегномерное пространство.

Построению фундаментальной системы решений уравнения Хилла в настоящее время посвящено много статей, но ни в одной из них не была сделана попытка построения фундаментальной системы решений. В данной статье этот пробел в теории устойчивости был устранен.

Рассмотрим уравнение относительно y [1]

$$A_1(\mu)\vec{y}=\vec{0},\quad \mu\in G. \tag{1}$$

$$G:\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le \operatorname{Im}\mu\le\dfrac{1}{2},\\ -\infty<\operatorname{Re}\mu<+\infty,\end{cases}$$

где матрица $A_1(\mu)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
\dots 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\alpha}\dots \\
\dots \dfrac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\dfrac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\dfrac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\dfrac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha}\dots, \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array} \tag{2}$$

Векторное уравнение (1) называется разрешающим уравнением для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a(t)x=0. \tag{3}$$

Теорема 1. Декремент матрицы (2) равен 1.

Допустим, что декремент $m>1$. Тогда уравнение (1) имеет m линейно-независимых m решений:

$$\mathrm{v}_k=\left(\dots,\mathrm{v}_k^{-2},\mathrm{v}_k^{-1},\mathrm{v}_k^{0},\mathrm{v}_k^{1},\mathrm{v}_k^{2},\dots\right),\quad \left(\mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{m}\right). \tag{4}$$

Тогда общее решение уравнение (1)

$$\vec{y}=c_1\mathrm{v}_1+c_2\mathrm{v}_2+\dots+c_m\mathrm{v}_m,$$

где c_k – произвольные постоянные.

$$y_k(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{v}_k^j e^{ijt},\quad \left(\mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{m}\right),$$

и искомое решение дифференциального уравнения (3) имеет вид

$$x_k(t)=e^{\mu_0 t}y_k(t)=e^{\mu_0 t}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{v}_k^j e^{ijt},\quad \left(\mathrm{k}=1,2,\dots,\mathrm{m}\right),$$

где $\Delta_1(\mu_0)=0$.

Известно, что решение уравнения, имеющее вид [2]

$$x(t)=e^{\mu_0 t}y(t), \tag{5}$$

где $y(t)$ – некоторая периодическая функция с периодом 2π, которая с точностью до постоянного множителя определяется однозначно.

Поэтому решения уравнения (3)

$$x_k(t)=e^{\mu_0 t}y_k(t)\quad (k=1,2,\dots,m),$$

т.е., $y_1(t),y_2(t),\dots,y_m(t)$ – линейно зависимы. Отсюда также следует линейная зависимость векторов $\vec{\mathrm{v}}_1,\vec{\mathrm{v}}_2,\dots,\vec{\mathrm{v}}_m$.

Итак, остается положить, что $m=1$, т.е. нетривиальное решение векторного уравнения (1) с точностью до постоянного множителя определяется однозначно.

Таким образом, общее решение векторного уравнения (1) имеет вид

$$\vec{y}=c\vec{\mathrm{v}}_0,$$

где с – произвольное постоянное.

Пусть

$$\vec{v}_0 = \left(..., v_0^{-2}, v_0^{-1}, v_0^0, v_0^1, v_0^2, ...\right),$$

– некоторое нетривиальное решение разрешающего уравнения (1).

При этом минор хотя бы одного элемента матрицы $A_1\left(\mu_0\right)$ будет отличен от нуля. Пусть такой элемент, минор которого отличен от нуля, находится в строке с номером k_0 (если таких строк много, то через k_0 обозначим любую из них). Через $A_{k_0}^m\left(\mu_0\right)$ обозначим алгебраические дополнения элементов строки с номером k_0 матрицы $A_1\left(\mu_0\right)$:

$$A_{k_0}^m\left(\mu_0\right) = \left\| \left[A_{k_0}^m\left(\mu_0\right)\right]_{k_0 q} \right\|_{-\infty}^{\infty},$$

$$\left[A_{k_0}^m\left(\mu_0\right)\right]_{k_0 q} = \left(1 + \frac{\alpha}{(\mu_0 + ip)^2 - \alpha}\right)\delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{\left(\mu_0 + ip\right)^2 - \alpha}.$$

Как известно, координаты вектора $\vec{v}_0$ будут соответственно пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов строки k_0 с точностью до постоянного множителя.

Следовательно, общее решение векторного уравнения (1)

$$\vec{y} = c\,\vec{v}_0,$$

где c – произвольное постоянное. Тогда для $y\left(t\right)$ имеем:

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k_0}^m(\mu_0)e^{imt}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если μ_0 есть корень уравнения

$$\Delta_1\left(\mu_0\right) = 0, \tag{6}$$

то

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{k_0}^m(\mu_0)e^{imt}. \tag{7}$$

В дальнейшем, не нарушая общности, можно предположить, что если решение уравнения (3) ищется в виде (5), то $y(t)$ определяется по формуле (7), μ_0 является корнем уравнения (6).

Таким образом, решение уравнения Хилла имеет вид:

$$x(t) = e^{\mu_0 t}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{k_0}^m(\mu_0)e^{imt}. \tag{8}$$

Теорема 3. В нормальном определителе абсолютно сходится ряд миноров элементов любой строки (столбца) [3, с. 346].

Пусть $A_p^q\left(\mu\right)$ есть минор элемента

$$\left[A\left(\mu\right)\right]_{pq} = \left(1 + \frac{\alpha}{\left(\mu + ip\right)^2 - \alpha}\right)\delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{\left(\mu + ip\right)^2 - \alpha}$$

матрицы определителя

$$\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\ldots 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \ldots \\
\ldots \frac{a_{-1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \ldots \\
\ldots \frac{a_{0+2}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu+0i)^2-\alpha} & \ldots \\
\ldots \frac{a_{1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \ldots \\
\ldots \frac{a_{2+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{pq}(\mu) == \begin{cases} \left|A^q{}_p(\mu)\right| : A^q{}_p(\mu), & \text{если } A^q{}_p(\mu)\neq 0, \\ 1, & \text{если } A^q{}_p(\mu)=0 \end{cases}$$

В таком случае $\left|C_{pq}(\mu)\right|=1$.

Поэтому элементы p-ой строки ограничены числом 1 и если элементы данной строки заменим членами ряда

$$\ldots, C_{p(q-1)}(\mu), \quad C_{pq}(\mu), \quad C_{p(q-1)}(\mu), \ldots$$

то получим полунормальный определитель [3, с. 346]. Разлагая этот определитель по элементам p-ой строки, имеем

$$\Delta^1[\mu] = \ldots + C_{p(q-1)}(\mu)\mathrm{A}_p^{q-1}(\mu) + C_{pq}(\mu)\mathrm{A}\,_p^{\,q}(\mu) + C_{p(q+1)}(\mu)\mathrm{A}_p^{q+1}(\mu) + \ldots,$$

и ряд

$$\Delta^1(\mu) = \ldots + \left|\mathrm{A}_p^{q-1}(\mu)\right| + \left|\mathrm{A}_p^{q}(\mu)\right| + \left|\mathrm{A}_p^{q+1}(\mu)\right| + \ldots \quad < +\infty$$

сходится.

Отметим, что при любых значениях $\mu \in G$ ряд миноров элементов строки p сходится абсолютно, где хотя бы один минор отличен от нуля, если таких строк много, то можно взять любую строку.

Как известно, каноническое уравнение для определения характеристических показателей [1] имеет вид

$$z^2 + 2i\sqrt{\pi^2 d(0,\varepsilon)}z - 1 = 0, \qquad z = e^{\pi\mu}, d(0)=2a_{-1}a_1. \tag{9}$$

$$\Delta_1(\mu_k) =, \ detA_1(\mu_k) = 0 \ (k=1,2),$$

так как μ_1, μ_2 корни уравнения

$$\Delta_1(\mu) = 0.$$

и для координат вектора y имеем:

$$y_q = A_1^q(\mu) \ (q=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots).$$

$$y_k = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{k_0}{}^q(\mu_k)e^{iqt} \quad (k=1,2).$$

Теорема 4. Если

$$d(0) < \frac{1}{\pi^2}$$

то система функций

$$x_1(t)=e^{\mu_1 t}\sum_{q=\infty}^{\infty} A^q{}_{k_{0\,0}}(\mu_1)e^{qit}, \qquad \mu_1=-\frac{i}{\pi}arctg\sqrt{\frac{\pi^2 d(0)}{\pi^2 d(0)-1}}$$

$$x_2(t)=e^{\mu_2 t}\, e\sum_{q=-\infty}^{\infty} A^q{}_{k_0}(\mu_2)e^{qit}, \quad \mu_2=\frac{i}{\pi}\left(arctg\sqrt{\frac{\pi^2 d(0)}{1-\pi^2 d(0)}}-\pi\right);$$

образуют фундаментальную систему, если

$$d(0)>\frac{1}{\pi^2},$$

то система функций

$$x_1(t)=e^{\mu_1 t}\sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{k_0}(\mu_1)e^{iqt}, \qquad \mu_1=\frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)}-\sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right)-\frac{i}{2}$$

$$x_2(t)=e^{\mu_2 t}\sum A_{k_0}(\mu_2)e^{iqt}, \qquad \mu_2=\frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)}+\sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right)-\tfrac{i}{2},$$

образует фундаментальную систему, а показатели Ляпунова

$$\lambda_1=\frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)}-\sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right), \qquad (10)$$

$$\lambda_2=\frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)}+\sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right),$$

а при

$$d(0)=\frac{1}{\pi^2},$$

то система функций

$$x_1(t)=e^{-\frac{it}{2}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} A^q{}_{k_0}\left(-\frac{i}{2}\right)e^{iqt},$$

$$x_2(t)=te^{-\frac{it}{2}}\sum_{q=-\infty}^{\infty} A^q{}_{k_0}\left(-\frac{i}{2}\right)e^{iqt}, \qquad \mu_1=\mu_2=-\frac{i}{2},$$

образует фундаментальную систему решений уравнения Хилла (3), где показатели Ляпунова $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Встречающиеся здесь ряды есть абсолютно сходящиеся ряды миноров элементов любой строки, в которых хотя бы один минор отличен нуля. Так как каждый минор нормальной матрицы $A_1(\mu)$ представляет собой нормальную матрицу, то каждый ряд сходится абсолютно [3, с. 364]. Линейная независимость функций очевидна.

Замечание. Случай $d(0)<0$ ничего нового не дает. В случае, когда $d(0)$ комплексное число, решая квадратное уравнение (9) выделим действительные части характеристических показателей μ_1, μ_2, которые есть показатели Ляпунова. $A_1(\mu)$ – есть нормальная матрица. Определитель $\Delta_1(\mu)$ также называется нормальным. Нормальная система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель равен нулю [3]:

$$\Delta_1(\mu)=\det A_1(\mu)=0.$$

Таким образом, для уравнения Хилла имеем три класса фундаментальных систем решений:

I. Класс ограниченных функций, у которых чисто мнимые характеристические показатели.

II. Класс функций, имеющих равных по модулю, но различные по знаку показателеи Ляпунова.

III. Класс функций, имеющих чисто мнимые, кратные характеристические показатели.

Теорема 4. Пусть

$$\Delta_1(\mu)=0.$$

Тогда уравнение (3) разрешимо тогда и только тогда, когда вектор

$$\vec{y}=\left(...,\mathrm{A}_{k_0}^{-2}(\mu),\mathrm{A}_{k_0}^{-1}(\mu),\mathrm{A}_{k_0}^{0}(\mu),\mathrm{A}_{k_0}^{1}(\mu)\mathrm{A}_{k_0}^{2}(\mu),...\right) \tag{11}$$

есть единственное, с точностью до постоянного, решение разрешающего уравнения (1)

$$A_1(\mu)\vec{y}=\vec{0}.$$

Необходимость. Пусть

$$x(t)=e^{\mu t}y(t)=e^{\mu t}\sum_{m=-\infty}^{\infty}y_m e^{imt}$$

есть решение уравнения Хилла, где вектор

$$\vec{y}=\left(...,y_{-n},...,y_{-2},y_{-1},y_0,y_1,y_2,...,y_n,...\right)$$

есть решение разрешающего уравнения (1), а так как система однородная и матрица имеет декремент, равный 1, то координаты вектора y прямо пропорциональны алгебраическим дополнениям элементов любой строки матрицы $A_1(\mu)$:

$$y_q = A_1^{\,q}(\mu)\quad(...,-2,-1,0,1,2,...), \tag{12}$$

где хотя бы один из миноров элементов строки k_0, отличен от нуля.

Таким образом, вектор (11) есть решение разрешающего уравнения (1).

Известно, что для любого нормального определителя сумма произведений элементов любой строки на соответствующие им алгебраические дополнения равна значению этого определителя. В данном случае она равна 0, а сумма произведений алгебраических дополнений элементов одной строки также на соответствующие элементы другой строки также равна 0. Разлагая $\Delta_1(\mu)$ по элементам строк, имеем:

$$p\neq k_0,\quad \sum_{q=-\infty}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{(\mu+ip)^2-\alpha}\right)\delta_{pq}+\frac{a_{p-q}}{(\mu+ip)^2-\alpha}\right]A_{k_0}^{q}(\mu)=0,$$

$$p=k_0,\quad \sum_{q=-\infty}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{(\mu+ik_0)^2-\alpha}\right)\delta_{k_0q}+\frac{a_{k_0-q}}{(\mu+ik_0)^2-\alpha}\right]A_{k_0}^{q}(\mu)=0.$$

Достаточность. Пусть вектор (11) есть решение разрешающего уравнения (1).Тогда вектор

$$y^{\rightarrow}=\left(...,y_{-2},y_{-1},y_0,y_1,y_2,...\right)$$

также есть решение разрешающего уравнения (1). Таким образом, получаем (12), а это значит, что функция

$$x(t)=e^{\mu t}y(t)=e^{\mu t}\sum A_1^{q}(\mu)e^{iqt}$$

есть решение уравнения (3).

$$\sum_{q=-\infty}^{q=\infty}A_p^{\,q}(\mu)$$

сходится абсолютно в G.

Теорема 5.

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty}\ (\mu+iq)^k y_q\,(k=0,1,2)$$

сходится абсолютно в G, где $y_q=A_{k_0}^{q}(\mu_0)$ есть минор элемента, находящегося на пересечении k_0-строки и q-го столбца $\Delta_1(\mu)$.

Доказательство. Умножим слева матрицу

$$
\begin{pmatrix}
(\mu-2i)^2-\alpha & & & & \backslash \\
 & (\mu-i)^2-\alpha & a & & \\
 & & (\mu-0i)^2-\alpha & & \\
 & & & (\mu+i)^2-\alpha & \\
 & & & & (\mu+2i)^2-\alpha
\end{pmatrix}
$$

на матрицу

$$
\begin{matrix}
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\ldots 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-2-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots \dfrac{a_{-1+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{-1-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots \dfrac{a_{0+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{0-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots \dfrac{a_{1+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{1-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots \dfrac{a_{2+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \dfrac{a_{2-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\dfrac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha}\ldots. \\
\multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{matrix}
$$

получим матрицу:

$$
\begin{pmatrix}
(\mu-2i)^2 & a_{-2+1} & a_{-2-0} & a_{-2-1} & a_{-2-2} \\
a_{-1+2} & (\mu-i)^2 & a_{-1-0} & a_{-1-1} & a_{-1-2} \\
a_{0+2} & a_{0+1} & (\mu-0i)^2 & a_{0-1} & a_{0-2} \\
a_{1+2} & a_{1+1} & a_{1-0} & (\mu+i)^2 & a_{1-2} \\
a_{2+2} & a_{2+1} & a_{2-0} & a_{2-1} & (\mu+2i)^2
\end{pmatrix}.
$$

Полученную матрицу умножим на поляризующую матрицу:

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha} & & & & \\
 & \dfrac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & & & \\
 & & \dfrac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha} & & \\
 & & & \dfrac{1}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \\
 & & & & \dfrac{1}{(\mu+2i)^2-\alpha}
\end{pmatrix}.
$$

Тогда получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} \\ \frac{a_{-1+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} \\ \frac{a_{0+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} \\ \frac{a_{1+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} \\ \frac{a_{2+2}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha} \end{pmatrix}$$

Эту матрицу обозначим $A(\mu)$. Тогда элементы q-го столбца имеют общий множитель

$$\frac{1}{(\mu+iq)^2-\alpha}\ . \tag{13}$$

Обозначим через $A^N(\mu)$ усеченный определитель $2N+1$-го порядка, который получен из данной матрицы путем вынесения общего множителя (13). Через $A_N^q(\mu)$ обозначим минор элемента какой-нибудь строки, пересекающей столбец q. Так как система, соответствующая разрешающему уравнению (1) однородная и декремент матрицы равен единице, то в качестве $A_N^q(\mu)$ можно взять алгебраические дополнения элементов любой строки, где хотя бы один из миноров отличен от нуля.

Поэтому имеем

$$\sum_{q=-N}^{N} (\mu+iq)^k A_N^q(\mu) = \sum_{q=-N}^{N} \frac{(\mu+iq)^k}{(\mu+iq)^2-\alpha} A_N^q(\mu) \quad k=(0.1.2)$$

для усеченных матриц, в которых удален общий множитель (13). Отсюда следует, что

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |\mu+iq|^k y_q = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{A}_N^q(\mu)\right|,$$

где ряд справа сходится абсолютно (теорема 3).Так как $A(\mu)$ есть нормальная матрица, то $A_N^q(\mu)$ остаются нормальными.

Следует отметить, что данная статья поддерживает тот факт, что проблему построения фундаментальной системы решений для уравнения Хилла невозможно решить в конечномерном пространстве. Как видим, для положительного решения данной проблемы необходимо выйти из конечного пространства в бесконечное.

Литература

1. *Карасаев И.К.* Построение характеристического уравнения // Наука и новые технологии. – 2008. – №3–4. – С. 167–173.
2. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – 2-е изд. – М., 1966. – 530 с.
3. *Каган В.Ф.* Основания теории определителей. – Одесса, 1922. – 393 с.