УДК 517.968 (575.2) (04)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СКАЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

Г.С. Ободоева

Рассматривается скалярное интегральное уравнение Вольтерра первого рода. Построены Вольтерровые регуляризирующие операторы и доказаны теоремы единственности в различных пространствах.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода; регуляризующие операторы; единственность решения.

Рассмотрим уравнение

$$\int_t^b K(t,s)U(s)ds = f(t), t\in[a,b], a<b\,, \qquad (1)$$

где $K(t,s)$ и $f(t)$ – заданные функции.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon\vartheta(t,\varepsilon)+\int_t^b K(t,s)\vartheta(s,\varepsilon)ds=f(t),t\in[a,b], \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр.

В [1] предложен метод регуляризации для интегральных уравнений первого ряда. Интегральные уравнение типа (1) и (2) исследовались в [2]. В указанных работах рассматривались уравнения с переменным верхним пределом. В настоящий работе для уравнения (1) построены вольтерровые регуляризирующие операторы, доказаны теоремы единственности.

Предположим, что

а) при любом фиксированным $t\in[a,b]$ $K(t,s)\in L^{q_1}(t,b), q_1\geq 1$ функция $K(t,s)\in L^1(a,b)$ и $K(t,t)\geq 0, t\in[a,b]$;

б) при $\tau>\eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s)\in C_1=\{(s,t):a<t<s<b\}$ справедлива оценка

$$\left|K(\tau,s)-K(\eta,s)\right|\leq l(s)\int\left|K(s,s)\right|ds,$$

где $l(t)\geq 0$ при $t\in[a,b]$ и $l(t)L^{q_1}(a,b),q_1\geq 1$.

Будем обозначать $C_\varphi^\gamma[a,b],0<\gamma\leq 1$, линейное пространство всех функций $U(t)$, определенных на $[a,b]$ и удовлетворяющие условию $\left|U(s)-U(t)\right|\leq C\left|\varphi(s)-\varphi(t)\right|^\gamma,\varphi(t)=\int_t^b\left|K(s,s)\right|ds$, где C — положительная постоянная, зависящая от $U(t)$, но не от t и s $C_\varphi^\gamma[a,b]$ является банаховым пространством с нормой

$$\left\|U(t)\right\|_\gamma=\sup\left|U(t)\right|+\sup\left|U(s)-U(t)\right|/\left|\varphi(s)-\varphi(t)\right|^\gamma;$$

пространство непрерывных функций с нормой $\left\|U(t)\right\|_C=\max\left\|U(t)\right\|,t\in[a,b]$.

Лемма 1. Пусть

$$\vartheta(t,\varepsilon)=U(t)^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(s)-\varphi(t)]}\left[U(s)-U(t)\right]ds,\varepsilon>0. \tag{3}$$

Тогда если $U(t)\in C[a,b],U(b)=0,K(t)\in L'(a,b),K(t)>0$ при почти всех $t\in[a,b]$ и $\varphi(t)=\int_t^b K(s)ds,t\in[a,b]$, то на сегменте $[a,b]$ справедлива оценка

$$\left\|\vartheta(t,\varepsilon)\right\|\leq\omega_{\bar U}(\varepsilon^\beta)3\left\|U(t)\right\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}, \tag{4}$$

где β произвольные число из интервала (0,1)

$$\omega_{\bar U}(\delta)=\sup\left|(\varphi^{-1}(x))-U(\varphi^{-1}(\nu))\right|$$

$\varphi^{-1}(x)$ — обратная функция к функции $\varphi(t)$;

если $U(t)\in C_\varphi^\gamma[a,b],0<\gamma\leq 1,U(b)=0,K(t)\in L'(a,b)$

$K(t)\geq 0$ при $t\in[a,b]$, $\varphi(t)=\int_t^b K(s)ds, t\in[a,b]$, то

$$\left|\vartheta(t,\varepsilon)\right\|_C\leq NC\varepsilon^\gamma, \tag{5}$$

где $N=\sup\limits_{t,s\in[a,b]}\left|U(s)-U(t)\right|/\left|\varphi(s)-\varphi(t)\right|^\gamma$ $C=\gamma\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$.

Доказательство. Пусть $a \le t \le \varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta}), 0 < \beta < 1$.

Тогда

$$\left|\vartheta(t,\varepsilon) \le \omega_{\overline{U}}(\varepsilon^{\beta}) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \omega_{\overline{U}}(\varepsilon^{\beta}) \int_t^b \frac{1}{\varepsilon} K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s K(s)ds} ds \le \omega_{\overline{U}}(\varepsilon^{\beta}) \right. . \tag{6}$$

Если $\varphi^{-1}(\varepsilon^{\beta}) \le t \le b$, то

$$| \; U(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} \; | \le \| U(t) \; \|_C \, e^{-\frac{1}{1-\beta}} , \tag{7}$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})} K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s K(\tau)d\tau} \left[U(s) - U(t)\right] ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^{\beta})}^{b} K(s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s K(\tau)d\tau} \left[U(s) - U(t)\right] ds \le \right. \tag{8}$$

$$\le \omega_{\overline{U}}(\varepsilon^{\beta}) + 2 \| u(t) \; \|_C \, e^{-\frac{1}{1-\beta}} .$$

Учитывая (6), (7), (8) из (3) получаем оценку (4).

Если $U(t) \in C_{\sigma}^{\gamma}\left[a,b\right]$, то

$$\left| \vartheta(t,\varepsilon) \;\; \right| \le N(\varphi(t))^{\gamma} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \frac{N}{\varepsilon} \int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(s)-\varphi(t)]} K(s) \left[\varphi(s) - \varphi(t)\right]^{\gamma} ds =$$

$$= N \int_t^b e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(s)-\varphi(t)]} K(s) \gamma \left[\varphi(s) - \varphi(t)\right]^{\gamma-1} ds = N\gamma \int_0^{\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}} e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau \varepsilon^{\gamma} \le NC\varepsilon^{\gamma} .$$

Рассмотрим уравнение (2)

$$\vartheta(t,s) + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(s,s) \vartheta(s,\varepsilon) ds = -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b \left[K(t,s) - K(s,s)\right] \vartheta(s,\varepsilon) ds + \frac{f(t)}{\varepsilon}$$

отсюда, используя резольвенту ядра $\left[-\frac{K(s,s)}{\varepsilon}\right]$, имеем:

$$\vartheta(t,s) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_t^b \left[K(t,s) - K(s,s)\right] \vartheta(s,\varepsilon) ds + \frac{f(t)}{\varepsilon} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^t K(\tau,\tau)d\tau} \{ -f(s) + \int_t^b \left[K(s,\tau) - K(\tau,\tau)\right] \vartheta(\tau,\varepsilon) d\tau \} ds .$$

Далее, после применения формулы Дирихле, получаем

$$\vartheta(t,\varepsilon) = \int_t^b H(t,s,\varepsilon) \vartheta(s,\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} f(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} \left[f(s) - f(t)\right] ds , \tag{9}$$

где $H(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\left[K(t,s) - K(s,s)\right] e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} -$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_t^b K(\tau,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} \left[K(t,s) - K(\tau,s)\right] . \tag{10}$$

Уравнения (2) и (9) эквивалентны. Учитывая условия а) и б) из (10) имеем:

$$\left| H(t,s,\varepsilon) \right| \le \tfrac{1}{\varepsilon} l(s) \int_t^s \left| K(\nu,\nu) d\nu \right| e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} +$$

$$+ \tfrac{1}{\varepsilon^2} \int_t^s K(\tau,\tau) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^\tau K(\nu,\nu)d\nu} \int_t^\tau K(\nu,\nu) d\nu d\tau \} \le l(s) . \qquad (11)$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия а) и б). Тогда если $K(t,t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$, уравнение (1) имеет решение $U(t) \in C[a,b]$ и $U(b) = 0$, то решение уравнения (2) при $\varepsilon > 0$ сходится по норме $C[a,b]$ к $U(t)$.

При этом справедлива оценка

$$\left\| \vartheta(t,\varepsilon) - U(t) \right\|_C \le 3M \left\| U(t) \right\|_c e^{-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-\beta}}} + M \omega_4 - (\varepsilon^\beta) , \qquad (12)$$

где β — произвольные число из (0,1),

$$\omega_{\bar{U}}(\delta) = \sup_{|x-\nu|\le\delta} \left| U(\varphi^{-1}(x)) - U(\varphi^{-1}(\nu)) \right|, \varphi(t) = \int_t^b K(s,s)ds ;$$

$\varphi^{-1}(x)$ – обратная функция к функции $\varphi(t)$,

$$M = \exp\left[\int_a^b l(s) ds \right];$$

если $K(t,t) \ge 0$ при $t \in [a,b]$, уравнение (1) имеет решение $U(t) \in C_\sigma^\gamma [a,b], 0 < \gamma \le 1,$ $\varphi(t) = \int_t^b K(s,s)ds, U(b) = 0$, то решение $\vartheta(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[a,b]$ к $U(t)$. При этом справедлива оценка

$$\left\| \vartheta(t,\varepsilon) - U(t) \right\|_C \le B\varepsilon^\gamma , \qquad (13)$$

где $B = TC \exp\left[\int_a^b l(s)ds \right], C = \gamma \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\gamma-1} d\tau, T = \sup_{t,s\in[a,b]} \left| U(t) - U(s) \right| / \left| \varphi(t) - \varphi(s) \right|^\gamma$.

Доказательство. В уравнении (2) сделаем замену

$$\vartheta(t,\varepsilon) = U(t) + \xi(t,\varepsilon) . \qquad (14)$$

где $U(t)$ — решение уравнения (1). Подставляя (14) в (2), имеем:

$$\varepsilon \xi(t,\varepsilon) + \int_t^b K(t,s) \xi(s,\varepsilon) ds = -\varepsilon U(t) . \qquad (15)$$

Сравнивая эквивалентные уравнения (2) и (9), уравнение (15) сводим к эквивалентному уравнению

$$\xi(t,\varepsilon) = \int_t^b K(t,s,\varepsilon) \xi(s,\varepsilon) ds + \varphi(t,\varepsilon) , \qquad (16)$$

где

$$\varphi(t,\varepsilon) = U(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} + \tfrac{1}{\varepsilon} \int_t^b K(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^b K(\tau,\tau)d\tau} \left[U(t) - U(s) \right] ds . \qquad (17)$$

Учитывая оценку (11) из (15) имеем:

$$\left|\xi(t,\varepsilon)\right| \le \int_t^b L(s)\left|\xi(s,\varepsilon)\right|ds + \left|\varphi(t,\varepsilon)\right|, t \in [a,b]. \quad (18)$$

В случае 1) из (18) в силу неравенства Грануолла–Беллмана, в силу (17) и в силу леммы 1 имеем оценку (13).

Следствие 1. Если выполняются условия а), б) и $K(t,t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$, то решение уравнения (1) в пространстве $C[a,b]$ единственно.

Доказательство. Пусть $U(t)$ – ненулевое непрерывные на $[t_0, T]$ решение уравнения (1) при $f(t) \equiv 0$. Тогда

$$\left|\int_t^b K(s,s)U(s)ds\right| \le \int_t^b \left|K(t,s) - K(s,s)\right|\left|U(s)\right|ds.$$

Отсюда, по условию и в силу теоремы о среднем, имеем:

$$\left|U(t)^*\right| \le \int_t^b l(s)\left|U(s)\right|ds, t^* \in [t,b].$$

Теперь переходя к пределу при $b \to t$, получим $U(b) = 0$. Тогда из оценки (12) вытекает

$$\left\|U(t)\right\|_C \le 2M\omega_{\overline{U}} - (\varepsilon^\beta),$$

где $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 – достаточное малое фиксированное число. Следовательно, $\left\|U(t)\right\|_C = 0$, т.е $U(t) = 0$ при $t \in [a,b]$.

Следствие 2. Если выполняются условия а), б) и существует число $t_1 \in (a,b)$ такое, что $K(t,t) > 0$ при почти всех $t \in (a,t_1)$, то решение уравнения (1) единственно в пространстве $C_\varphi^\gamma[a,b], 0 < \gamma \le 1, \varphi(t) = \int_t^b K(s,s)ds$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Литература

1. *Асанов А.* Регуляризация и единственность решений уравнений Вольтерра первого рода: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 1982.
2. *Демидович В.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.
3. *Иманалиев М.И., Асанов А.* Регуляризация единственных и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Исследования по интегро-дифференц. уравнениям. Вып. 21. – Бишкек: Илим, 1988.