УДК 517.9

ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

На основе метода "Цепочка" получена формула, позволяющая свести процесс решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к последовательному вычислению двух неопределенных интегралов. Дополнительным преимуществом предлагаемого подхода является то, что в отличие от классического подхода, он не зависит от вида корней характеристического уравнения. Такой подход особенно выгоден для тех, кто использует дифференциальные уравнения для решения практических задач, в частности для инженеров.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; решение уравнения с постоянными коэффициентами, влияние вида корней характеристического уравнения.

КАДИМКИ СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТEҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУ ФОРМУЛАСЫ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Бул макалада "Чынжырча" ыкмасынын негизинде эки аныкталбаган интегралды ырааттуулук менен эсептөөгө туруктуу коэффициенттери менен экинчи тартиптеги кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди чыгаруу процессине алып келүүчү формула алынды. Сунушталып жаткан ыкманын кошумча артыкчылыгы болуп классикалык ыкмадан айырмаланып, ал мүнөздүү теңдеменин тамырларынын түрүнөн көз каранды эмес экендиги эсептелет. Мындай ыкма практикалык маселелерди чечүү үчүн дифференциалдык теңдемелерди колдонгондор, айрыкча инженерлер үчүн өтө пайдалуу.

Түйүндүү сөздөр: кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелер; туруктуу коэффициенттери менен теңдемелерди чыгаруу; мүнөздүү теңдемелердин тамырларынын түрлөрүнүн таасири.

THE LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS' SOLUTION FORMULA

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

A formula that allows us to reduce the process of solving linear ordinary second-order differential equations with constant coefficients to the sequential calculation of two indefinite integrals is obtained in this paper. An additional advantage of the proposed approach is that, unlike the classical approach, it does not depend on the type of roots of the characteristic equation. This approach is especially beneficial for those who use differential equations to solve practical problems, in particular for engineers.

Keywords: linear ordinary differential equations; space of solutions; solving an equation with constant coefficients, the influence of the form of the characteristic equation's roots.

1. Выдающийся физик Л.Д. Ландау говорил: "Для занятий теоретической физикой в первую очередь необходимо знание математики. При этом нужны не всякие теоремы существования, на которые так щедры математики, а математическая техника, то есть умение решать конкретные математические задачи. Прежде всего нужно научиться правильно (и по возможности быстро) дифференцировать, интегрировать, решать обыкновенные дифференциальные уравнения в квадратурах; изучить векторный анализ и тензорную алгебру (то есть умение оперировать с тензорными индексами). Главную роль при этом изучении должен играть не учебник, а задачник – какой, не очень существенно, лишь бы в нём было достаточно много задач. Я категорически считаю, что из математики, изучаемой физиками, должны быть полностью изгнаны всякие теоремы существования, слишком строгие доказательства и т. п.” [1].

Соглашаясь с этими словами, высказанными в адрес специалистов в теоретической физике, полагаем, что они с тем же успехом верны и в отношении специалистов во всех областях инженерных и экономических наук. Поэтому мы считаем, что должен подвергнуться существенной переработке курс дифференциальных уравнений для будущих физиков и инженеров. В частности, нужны формулы, позволяющие получать общие и частные решения обыкновенных дифференциальных уравнений. К счастью, это оказывается возможно в линейном случае. Об этом говорится далее.

2. *Линейные уравнения первого порядка* – это уравнения, которые можно записать в виде:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{1}$$

Введем обозначение $z = e^{\int p(x)dx}$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$(yz)' \cdot z^{-1} = q(x). \tag{1a}$$

Вычислив производную от произведения yz, и раскрыв скобки в (1а), можем убедиться в том, что уравнения (1) и (1а) равносильны.

Последовательно перебрасывая множители в правую часть (1а) и интегрируя, получим множество всех решений уравнения (1) – общее решение:

$$y(x) = z^{-1}\left(\int z \cdot q(x)dx + C\right) \tag{2}$$

Пример 1

Решим начальную задачу вида:

$$y' - 2xy = 4x, \quad y(0) = 7.$$

Для этого уравнения $z = e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}$. Поэтому его можно переписать в виде, удобном для интегрирования: $\left(ye^{-x^2}\right)' e^{x^2} = 4x.$

Разделим обе части уравнения на e^{x^2} и возьмем интеграл от обеих его частей. Это даст равенство $ye^{-x^2} = -2e^{-x^2} + C$, где C произвольная постоянная.

Таким образом, общее решение уравнения $y(x) = -2 + Ce^{x^2}$.

Воспользовавшись начальным условием задачи, получим:

$$y(0) = 7 = -2 + C. \text{ Отсюда, } y(x) = -2 + 9e^{x^2}.$$

Решение уравнения (1) в относительно компактной форме можно записать, не используя никаких дополнительных обозначений, если коэффициент $p(x)$ будет постоянным.

Пример 2

Решим уравнение:

$$y' - \lambda y = q(x), \quad \text{где } \lambda \text{ – некоторое число.} \tag{1C}$$

В этом случае $z = e^{\int(-\lambda)dx} = e^{-\lambda x}$. Тогда, формула (2) примет вид:

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(\int e^{-\lambda x} q(x)dx + C\right). \tag{2C}$$

В частности, решением уравнения $y' - 7y = 5e^{2x}$ является функция:

$$y(x) = e^{7x}\left(\int e^{-7x} \cdot 5e^{2x}dx + C\right) = e^{7x}\left(5\int e^{-5x}dx + C\right) = -e^{2x} + Ce^{7x}.$$

3. Разложив обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в “цепочку” уравнений первого порядка, можно получить формулу, позволяющую написать общее решение этого уравнения. Напомним суть метода “Цепочка” [2, 3].

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами a и b можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z' - \lambda_1 z = f(x), \tag{3.1}$$

$$y' - \lambda_2 y = z, \tag{3.2}$$

где коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями алгебраической системы: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a; \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = b. \end{cases}$

В справедливости утверждения легко убедиться, подставив значение z из (3.2) в (3.1), и приравняв коэффициенты при y' и y к соответствующим коэффициентам в (3).

Из теоремы Виета следует, что корни алгебраической системы есть корни характеристического уравнения для уравнения (3):

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Процесс преставления исходного уравнения второго порядка в виде двух уравнений первого порядка будем называть методом цепочки.

Стоит отметить, что метод цепочки работает и в случае уравнений более высокого порядка.

Пример 3

Для того чтобы проинтегрировать уравнение:

$$y'' + 4y' + 4y = 8,75x^{1,5}e^{-2x}, \tag{4}$$

воспользуемся корнями характеристического уравнения и разложим уравнение (4) в цепочку уравнений:

$$z' + 2z = 8,75x^{1,5}e^{-2x}, \tag{4.1}$$

$$y' + 2y = z. \tag{4.2}$$

Перепишем уравнение (4.1) в виде $(ze^{2x})'e^{-2x} = 8,75x^{1,5}e^{-2x}$.

Следовательно, $(ze^{2x})' = 8,75x^{1,5}$, и $ze^{2x} = 3,5x^{2,5} + C_1$.

Таким образом, уравнение (4.2) примет вид: $y' + 2y = e^{-2x}(3,5x^{2,5} + C_1)$.

Записав его в виде $(ye^{2x})' = 3,5x^{2,5} + C_1$, проинтегрируем, и получим:

$$ye^{2x} = x^{3,5} + C_1x + C_2.$$

Таким образом, общим решением уравнения (4) является функция

$y = e^{-2x}(x^{3,5} + C_1x + C_2)$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные.

4. В этом пункте мы формализуем рассуждения предыдущего пункта и получим формулу общего решения обыкновенного линейного дифференциального уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y' + py' + qy = f(x). \tag{5}$$

Пусть λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Тогда уравнение (5) можно представить в виде цепочки уравнений:

$$z' - \lambda_1 z = f(x), \tag{5.1}$$

$$y' - \lambda_2 y = z, \tag{5.2}$$

Согласно формуле (2С), общее решение уравнения (5.1) можно записать в виде: $z(x) = e^{\lambda_1 x}\left(\int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx + A\right)$. Поэтому уравнение (5.2) примет вид: $y' - \lambda_2 y = e^{\lambda_1 x}\left(\int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx + A\right)$. Еще раз воспользуемся формулой (2С): $y(x) = e^{\lambda_2 x}\left\{\int e^{-\lambda_2 x}\left[e^{\lambda_1 x}\left(\int e^{-\lambda_1 x} f(x)dx + A\right)\right]dx + B\right\}$.

Раскроем квадратные скобки и получим:

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x}\int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}F(x)dx, \tag{GS}$$

В случае, когда λ_1 и λ_2 различны, эту формулу будет удобно записать в виде:

где $F(x)$ – любая первообразная функции $e^{-\lambda_1 x}f(x)$.

(Аббревиатура GS означает общее решение.)

Итак, получена новая формула. Конечно, нужно убедиться в том, что в известных случаях она дает те же решения уравнений. Для этого рассмотрим несколько примеров.

Пример 4

Найдем общее решение уравнения:

$$y'' + 4y' - 5y = 8. \tag{6}$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ являются числа $\lambda_1 = -5$ и $\lambda_2 = 1$. Поэтому, так как $\int e^{-(-5)x} 8dx = 1,6e^{5x} + C,$ в качестве $F(x)$ в формуле (GS) можно взять $1,6e^{5x}$. Тогда,

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x} + e^{x} \int e^{(-5-1)x} 1,6e^{5x} dx = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x} - 1,6.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что функция $y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{x} - 1,6$ действительно является решением уравнения (6).

Пример 5

Проинтегрируем уравнение:

$$y'' - y' - 6y = 5e^{3x} - 25e^{-2x}. \tag{7}$$

Квадратное уравнение $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 3$.

Так как $\int e^{-(-2)x}(5e^{3x} - 25e^{-2x})dx = e^{5x} - 25x + C,$ в качестве $F(x)$ в формуле (GS) можно взять $e^{5x} - 25x$. Поэтому,

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + e^{3x} \int e^{(-2-3)x} [e^{5x} - 25x] dx = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + 5xe^{-2x} + xe^{3x}.$$

Вычислив значения y' и y'', подставив их вместе со значением y в (7), можно убедиться в том, что $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + 5xe^{-2x} + xe^{3x} e^{3x}$ является общим решением уравнения (7).

5. При обсуждении методов решения дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, в классических учебниках обычно рассматривают три различные ситуации. Они определяются значением дискриминанта характеристического уравнения. Первая ситуация: положительный дискриминант, определяющий два различных действительных корня; вторая ситуация: нулевой дискриминант – два совпадающий корня; третья: отрицательный дискриминант – комплексные корни.

Метод цепочки, и как следствие, формула (GS), хорош еще и тем, что не зависит от вида корней характеристического уравнения. Продемонстрируем это на соответствующих примерах.

Пример 6

Найдем общее решение уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 8e^{\;x}/x. \tag{6}$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Так как корни равны друг другу, формула $y(x) = e^{\lambda_2 x} \left\{ \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \left(\int e^{-\lambda_1 x} f(x) dx + A \right) dx + B \right\}$ примет вид: $y(x) = e^{3x} \left\{ \int (8 \ln x + A) dx + B \right\} = e^{3x} \{8x \ln x - 8x + Ax + B\}$.

В данном случае: $\int e^{-\lambda_1 x} f(x) dx + A = \int e^{-3x} 8e^{3x} / x dx + A = 8 \ln x + A.$

Поэтому $y(x) = e^{3x} \left\{ \int (8 \ln x + A) dx + B \right\} = e^{3x} \{8x \ln x - 8x + Ax + B\}$.

Пример 7

Найдем общее решение уравнения:

$$y'' - 2y' + 10y = 8e^{x} \cos x. \tag{7}$$

Как известно [4, 5], часто удобнее решать более общую задачу – проинтегрировать уравнение:

$$u'' - 2u' + 10u = 8e^{(1+i)x}. \tag{8}$$

Согласно формуле Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x,$ линейность выражения $u'' \; 2 \; u' + 10u$ приводит к тому, что общим решением уравнения (7) будет действительная часть общего решения уравнения (8).

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ являются числа $\lambda_1 = 1 - 3i$ и $\lambda_2 = 1 + 3i$.

Поэтому, так как $\int e^{-(1-3i)x} 8e^{(1+i)x} dx = 2e^{4ix} / i + C,$ в качестве $F(x)$ в формуле (GS) можно взять $2e^{4ix} / i$. Тогда,

$$u(x) = C_1 e^{(1-3i)x} + C_2 e^{(1+3i)x} + e^{(1+3i)} \int e^{-6ix} \cdot 2e^{4ix} / i dx = C_1 e^{(1-3i)x} + C_2 e^{(1+3i)x} + e^{(1+i)x}.$$

Выделив действительную часть функции *u(x),* получим решение уравнения (7):

$$y(x) \ = e^x (A\cos 3x + B\sin 3x + \cos x).$$

Заключение. Формула, полученная в работе, сводит процесс решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) к последовательному вычислению двух неопределенных интегралов от функций, задаваемых правой частью уравнения и корней характеристического уравнения. При этом нет необходимости в длинных предварительных разговорах о линейной независимости частных решений, базисе. Этот подход является особенно ценным для тех, кого мало интересует теоретическое обоснование процесса решения ЛОДУ, но при этом нуждается в решении конкретных математических задач.

Литература

1. *Ливанова А.М.* Л.Д. Ландау / А.М. Ливанова. М.: Знание, 1983. 240 с.
2. *Kydyraliev S.K.* Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // The College Mathematics Journal, USA, 1996. Vol. 27. № 3. С. 199–204.
3. *Кыдыралиев С.К.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: БГИЭиК, 2000. 100 с.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: URSS, 2018. 336 с.
5. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М.: URSS, 2016. 512 с.