УДК 517.968.72

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕПОЛНЫМИ ЯДРАМИ

***С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова***

Устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости решений линейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра с неполными ядрами на полуоси. Для этого развивается метод вспомогательных ядер в сочетании с другими известными методами. Исследуются такие интегро-дифференциальные уравнения при невыполнении условий применимости других известных методов. Строится иллюстративный пример, показывающий естественность наложенных условий.

*Ключевые слова:* линейное вольтеррова интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка; асимптотическая устойчивость решений; метод вспомогательных ядер; нестандартный метод сведения к системе.

# ТОЛУК ЭМЕС ЯДРОЛОРУ МЕНЕН ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРА ТИБИНДЕГИ ИНТЕГРАЛДЫК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ТУРУКТУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

***С. Искандаров, Н.А. Абдирайимова***

Бул макалада жарым окто толук эмес ядролору менен төртүнчү тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктуулугунун жетишерлик шарттары белгиленген. Бул үчүн башка белгилүү ыкмалар менен айкалыштыруу менен кошумча ядролор ыкмасы өнүктүрүлөт. Башка белгилүү ыкмаларды колдонуу шарттары аткарылбаган учурда ушундай интегралдык-дифференциалдык теңдемелер изилдөөгө алынат. Берилген шарттардын табигыйлыгын көрсөткөн көрсөтмөлүү мисалдар келтирилет.

*Түйүндүү сөздөр:* төртүнчү тартиптеги сызыктуу Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдемелер; чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктуулугу; кошумча ядролор ыкмасы; стандарттык эмес системага келтирүү ыкмасы.

# ABOUT ASYMPTOTIC STABILITY OF SOLUTIONS OF THE LINEAR VOLTERRA INTEGRO - DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH INCOMPLETE KERNELS

***S. Iskandarov, N.A. Abdiraiimova***

Sufficient conditions for the asymptotic stability of solutions of a fourth-order linear integro-differential equation with incomplete kernels of Volterra type on the semi axis are established. For this purpose, the method of auxiliary kernels is developed in combination with other known methods. Such integro-differential equations are investigated if the conditions of applicability of other known methods are not met. An illustrative example is constructed that shows the naturalness of the imposed conditions.

*Keywords:* linear Volterra integral-differential equation of the fourth order; asymptotic stability of solutions; auxiliary kernel method; non-standard method of reduction to the system.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $\mathrm{I} = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; под асимптотической устойчивостью решений линейного ИДУ четвертого порядка понимается стремление к нулю при $t \to \infty$ всех решений и их производных до третьего порядка включительно.

**Задача.** Установить достаточные условия асимптотической устойчивости решений ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) + Q_2(t,\tau)x''(\tau)\right]d\tau = f(t), \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

в случае, когда выполняются условия:

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{t}\left|Q_k(t,\tau)\right| d\tau dt = \infty \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{2}$$

В ИДУ (2) отсутствует ядро с $x'''(\tau)$. Такое ИДУ будем называть ИДУ с неполными ядрами.

Такая задача изучается впервые. Изучение этой задачи проведем развитием метода вспомогательных ядер [1], при этом в ИДУ (2) вводим некоторое ядро $\mathrm{H}_1(t,\tau)$ с $x'''(\tau)$ по правилу “веса” [2, с. 114].

Ниже дано краткое содержание решения приведенной задачи.

В ИДУ (1) вводим ядро $H_1(t,\tau)$ с $x'''(\tau)$ следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau) = \sum_{k=0}^{2} Q_k(t,\tau) + H_1(t,\tau)x'''(\tau) - H_1(t,\tau)x'''(\tau) \tag{3}$$

и осуществляем интегрирование по частям:

$$-\int_{t_0}^{t} H_1(t,\tau)x'''(\tau)d\tau = -H_1(t,t)x''(t) + H_1(t,t_0)x''(t_0) + \int_{t_0}^{t} H'_{1\tau}(t,\tau)x''(\tau)d\tau. \tag{4}$$

Тогда ИДУ (1) приводится к нагруженному ИДУ вида:

$$x^{(4)}(t) + a_3(t)x'''(t) + \left[a_2(t) - H_1(t,t)\right]x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}\{Q_0(t,\tau)x(\tau) + Q_1(t,\tau)x'(\tau) +$$
$$+\left[Q_2(t,\tau) + H'_{1\tau}(t,\tau)\right]x''(\tau) + H_1(t,\tau)x'''(\tau)\}d\tau = f(t) - H_1(t,t_0)x''(t_0). \tag{5}$$

Далее к ИДУ (5) применим метод, разработанный в [3].

В ИДУ (5) сделаем следующую нестандартную замену [3]:

$$x'''(t) + px''(t) + qx'(t) + rx(t) = W(t)y(t), \tag{6}$$

где $p, q, r$ – некоторые вспомогательные параметры, причем $p > 0,\ q > 0,\ r > 0$; $0 < W(t)$ – некоторая весовая функция; $y(t)$ – новая неизвестная функция. В итоге из ИДУ (5) будем иметь следующую эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x'''(t) + px''(t) + qx'(t) + rx(t) = W(t)y(t), \\ y'(t) + b_3(t)y(t) + b_2(t)x''(t) + b_1(t)x'(t) + b_0(t)x(t) + \\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[T_0(t,\tau)x(\tau) + T_1(t,\tau)x'(\tau) + T_2(t,\tau)x''(\tau) + K(t,\tau)y(\tau)\right]d\tau = F(t) - (W(t))^{-1}H_1(t,t_0)x''(t_0), \end{cases} \tag{7}$$

где

$$b_3(t) \equiv a_3(t) - p + W'(t)(W(t))^{-1},$$
$$b_2(t) \equiv \left[a_2(t) - H_1(t,t) - pa_3(t) + p^2 - q\right](W(t))^{-1},$$
$$b_1(t) \equiv \left[a_1(t) - qa_3(t) + pq - r\right](W(t))^{-1},$$
$$b_0(t) \equiv \left[a_0(t) - ra_3(t) + pr\right](W(t))^{-1},$$
$$T_0(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}\left[Q_0(t,\tau) - rH_1(t,\tau)\right],$$
$$T_1(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}\left[Q_1(t,\tau) - qH_1(t,\tau)\right],$$
$$T_2(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}\left[Q_2(t,\tau) + H'_{1\tau}(t,\tau) - pH_1(t,\tau)\right],$$
$$K(t,\tau) \equiv (W(t))^{-1}H_1(t,\tau)W(\tau),$$
$$F(t) \equiv f(t)(W(t))^{-1}.$$

Для исследования системы (7) также применим метод из [3], а именно, проведем отдельно преобразования для каждого уравнения системы (7), затем их сложим для дальнейшего исследования.

Возводим обе части первого уравнения – ДУ третьего порядка для $x(t)$ в квадрат [2, с. 28], интегрируем в пределах от $t_0$ до $t$, в том числе по частям, и получаем следующее тождество:

$$\begin{aligned} V_1(t) \equiv \int\limits_{t_0}^{t}[(x'''(s))^2 + (p^2 - 2q)(x''(s))^2 + (q^2 - 2pr)(x'(s))^2 + r^2(x(s))^2]ds + \\ +qr(x(t))^2 + (pq - r)(x'(t))^2 + p(x''(t))^2 + 2prx(t)x'(t) + 2rx(t)x''(t) + \\ +2qx'(t)x''(t) \equiv \tilde{c}_* + \int\limits_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2 ds, \end{aligned} \tag{8}$$

где $(x(t), y(t))$ – произвольно фиксированное решение системы (2), $\tilde{n}_* = V(t_0)$.

Пусть [2]:

$$K(t,\tau) = \sum_{i=0}^{n} K_i(t,\tau), \tag{K}$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^{n} F_i(t), \tag{F}$$

$\psi_i(t) \quad (i = 1..n)$ – некоторые срезывающие функции;

$$R_i(t,\tau) \equiv K_i(t,\tau)\left(\psi_i(t)\psi_i(\tau)\right)^{-1}, \quad E_i(t) \equiv F_i(t)\left(\psi_i(t)\right)^{-1} \qquad (i = 1..n),$$

$$R_i(t,t_0) = A_i(t) + B_i(t) \qquad (i = 1..n), \tag{R}$$

$c_i(t) \qquad (i = 1..n)$ – некоторые функции.

Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t))$ системы (7) ее второе уравнение умножаем на $y(t)$, интегрируем в пределах от $t_0$ до $t$, в том числе по частям, вводим условия *(K)*, *(F),* функции $\psi_i(t),\ R_i(t,\tau),\ E_i(t),\ c_i(t)\ \ (i = 1..n)$, условия *(R)*, при этом применим леммы 1.4, 1.5 [4]. В результате будем иметь следующее тождество:

$$V_2(t) \equiv (y(t))^2 + 2\int_{t_0}^{t} b_3(s)(y(s))^2\,ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t,t_0) +$$

$$+c_i(t) - \int_{t_0}^{t}\left[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_o) + c_i'(s)\right]ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2\,d\tau\} \equiv$$

$$\equiv \tilde{c}_{**} + 2\int_{t_0}^{t} y(s)\left[F_0(s) - (W(s))^{-1}H_1(s,t_0)\,x''(t_o)\right]ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\left[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 + \int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2\,d\tau\right]ds - 2\int_{t_0}^{t} y(s)\{b_2(s)x''(s) + b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{s}\left[T_0(s,\tau)x(\tau) + T_1(s,\tau)x'(\tau) + T_2(s,\tau)x''(\tau) + K_0(s,\tau)y(\tau)\right]d\tau\}ds, \tag{9}$$

где $Y_i(t,\tau) \equiv \int_{\tau}^{t}\psi_i(\eta)y(\eta)d\eta \quad (i = 1..n), \qquad \tilde{c}_{**} = (y(t_0))^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i(t_0).$

Теперь сложим тождества (8), (9) и тогда получаем следующее тождество:

$$V(t) \equiv \int_{t_0}^{t}[(x'''(s))^2 + (p^2 - 2q)(x''(s))^2 + (q^2 - 2pr)(x'(s))^2 + r^2(x(s))^2]ds +$$

$$+qr(x(t))^2 + (pq - r)(x'(t))^2 + p(x''(t))^2 + 2prx(t)x'(t) + 2rx(t)x''(t) + 2qx'(t)x''(t) + (y(t))^2 +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} b_3(s)(y(s))^2\,ds + \sum_{i=1}^{n}\{A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 + B_i(t)(Y_i(t,t_0))^2 - 2E_i(t)Y_i(t,t_0) + c_i(t) -$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[B_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 - 2E_i'(s)Y_i(s,t_0) + c_i'(s)\right]ds + \int_{t_0}^{t} R_{i\tau}'(t,\tau)(Y_i(t,\tau))^2\,d\tau\} \equiv V(t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}(W(s))^2(y(s))^2\,ds + 2\int_{t_0}^{t} y(s)[F_0(s) - (W(s))^{-1}H_1(s,t_0)x''(t_0)]ds + \sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}[A_i'(s)(Y_i(s,t_0))^2 +$$

$$+\int_{t_0}^{s} R_{is\tau}''(s,\tau)(Y_i(s,\tau))^2\,d\tau]ds - 2\int_{t_0}^{t} y(s)\{b_2(s)x''(s) + b_1(s)x'(s) + b_0(s)x(s) +$$

$$+\int_{t_0}^{t}[T_0(s,\tau)x(\tau)+T_1(s,\tau)x'(\tau)+T_2(s,\tau)x''(\tau)+K_0(s,\tau)y(\tau)]d\tau\}ds. \qquad (10)$$

Переходя от тождества к интегральному неравенству с применением обобщенного критерия Сильвестра [5, с. 137], неравенства Коши–Буняковского, аналогично теореме из [3] доказывается

**Теорема**

Пусть 1) $p>0,\quad q>0,\quad r>0,\quad W(t)>0,$ выполняются условия *(K), (F), (R);*

2) $p^2-2q>0;\ q^2-2pr>0;$

3) все главные миноры матрицы $A$ положительны, где $A=\begin{pmatrix} qr & pr & r \\ pr & pq-r & q \\ r & q & p \end{pmatrix}$, т. е.

$\Delta_1=qr>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} qr & pr \\ pr & pq-r \end{vmatrix}=qr(pq-r)-p^2r^2>0,$

$\Delta_3=\det A=[p^2q^2+r^2-p^3r-q^3]r>0;$

4) $b_3(t)\geq 0;$

5) $A_i(t)\geq 0,\qquad B_i(t)\geq 0,\qquad B_i'(t)\leq 0,\qquad R_{i\tau}'(t,\tau)\geq 0,$ существуют функции

$A_i^*(t)\in L^1(I,R_+),\ c_i(t),\qquad R_i^*(t)\in L^1(I,R_+)$

такие, что $A_i'(t)\leq A_i^*(t)A_i(t),\ \left(E_i^{(k)}(t)\right)^2\leq B_i^{(k)}(t)c_i^{(k)}(t),\ R_{it\tau}''(t,\tau)\leq R_i^*(t)R_{i\tau}'(t,\tau)\quad (i=1..n;\ k=0,1);$

6) $(W(t))^2+\left(b_k(t)\right)^2+\left|F_0(t)\right|+(W(t))^{-1}\left|H_1(t,t_0)\right|+\left[\int_{t_0}^{t}(T_k(t,\tau))^2d\tau\right]^{\frac{1}{2}}+\int_{t_0}^{t}\left|K_0(t,\tau)\right|d\tau\in L^1(I,R_+\setminus\{0\})$

$(k=0,1,2).$

Тогда для любого решения $(x(t),y(t))$ системы (7) справедливы утверждения:

$$x^{(k)}(t)\in L^2(I,R)\ (k=0,1,2,3), \qquad (11)$$

$$y(t)=O(1), \qquad (12)$$

$b_3(t)(y(s))^2\in L^1(I,R_+),\quad A_i(t)(Y_i(t,t_0))^2=O(1)\qquad (i=1..n).$

Аналогично следствию из [3] получаем.

**Следствие**. Если выполняются все условия теоремы и $W(t)\to 0$ при $t\to\infty,$ то все решения и их производные до третьего порядка, включительно ИДУ (1), стремятся к нулю при $t\to\infty$, т. е. любое решение ИДУ четвертого порядка (1) асимптотически устойчиво.

На самом деле, по условиям теоремы имеем утверждение (11). Тогда применяя лемму Люстерника–Соболева [3; 6, с. 393–394] получаем, что для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) верны соотношения: $x^{(k)}(t)\to 0\ (k=0,1,2)$. Далее из замены (6) с учетом утверждения (12) вытекает, что $x'''(t)\to 0\ \ t\to\infty$. Следовательно, справедливо утверждение данного следствия.

**Пример**. Для ИДУ (1) с $a_3(t) \equiv 4 + e^{\sqrt{t}}$, $a_2(t) \equiv H_1(t,\tau) + 3e^{\sqrt{t}} + 5 - \dfrac{19e^{-t}}{t^2+1}$,

$a_1(t) \equiv 3 + 2e^{\sqrt{t}} - e^{-t}\sin e^{-2t}$, $a_0(t) \equiv 1 + e^{\sqrt{t}} + \dfrac{e^{-t}\sin 8t}{t^5+1}$, $Q_0(t,\tau) \equiv H_1(t,\tau) - \dfrac{e^{-t}\cos(t\tau)}{(t+2\tau+3)^7}$,

$Q_1(t,\tau) \equiv 2H_1(t,\tau) + \dfrac{e^{-t}\sin 6\tau}{(2t+3\tau+4)^5}$, $Q_2(t,\tau) \equiv 3H_1(t,\tau) - H'_{1\tau}(t,\tau) - 10e^{-2t}\sqrt{t+\tau+14}$,

$f(t) \equiv -\dfrac{e^{t^2-t}(\sin t)^{\frac{1}{7}}}{t+5} - \dfrac{e^{-t}\cos 9t}{t^2+2t+3}$, $t_0 = 0$ выполняются все условия теормы и следствия при

$p = 3, q = 2, r = \dfrac{1}{2}$, $W(t) \equiv e^{-t}$, $H_1(t,\tau) \equiv e^{-t+\tau}\left[\dfrac{1}{t-\tau+4} + \exp\left(\dfrac{t+\tau+9}{t+\tau+10}\right)\right] e^{t^2+\tau^2}(\sin t \sin\tau)^{\frac{1}{7}} +$

$+e^{-2t+2\tau} - 25e^{-3t+\tau}$, здесь $b_3(t) \equiv e^{\sqrt{t}}$, $b_2(t) \equiv -\dfrac{19}{t^2+1}$, $b_1(t) \equiv -\sin e^{-2t}$, $b_0(t) \equiv \dfrac{e^{-t}\sin 8t}{t^5+1}$,

$T_0(t,\tau) \equiv -\dfrac{\cos(t\tau)}{(t+2\tau+3)^7}$, $T_1(t,\tau) \equiv \dfrac{e^{-t}\sin 6\tau}{(2t+3\tau+4)^5}$, $T_2(t,\tau) \equiv -10e^{-t}\sqrt{t+\tau+14}$,

$n = 2$, $\psi_1(t) \equiv e^{t^2}(\sin t)^{\frac{1}{7}}$, $\psi_2(t) \equiv 1$, $R_1(t,\tau) \equiv \dfrac{1}{t-\tau+4} + \exp\left(\dfrac{t+\tau+9}{t+\tau+10}\right)$, $R_2(t,\tau) \equiv e^{-t+\tau}$,

$K_0(t,\tau) \equiv -25e^{-2t}$, $E_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+5}$, $E_2(t) \equiv 0$, $F_0(t) \equiv -\dfrac{\cos 9t}{t^2+2t+3}$, $A_1(t) \equiv \exp\left(\dfrac{t+9}{t+10}\right)$, $B_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+4}$,

$A_2(t) \equiv e^{-t}$, $B_2(t) \equiv 0$, $A_1^*(t) \equiv \dfrac{1}{(t+10)^2}$, $c_1(t) \equiv \dfrac{1}{t+4}$, $R_1^*(t) \equiv \dfrac{1}{(t+10)^2}$, $A_2^*(t) \equiv 0$, $c_2(t) \equiv 0$,

$R_2^*(t) \equiv 0$, $H_1(t,0) \equiv e^{-2t} - 25e^{-3t}$.

Значит, любое решение такого ИДУ асимптотически устойчиво.

Отметим, что рассмотренная нами задача является сложной и ее решение значительно расширяет классы ранее изученных ИДУ типа Вольтерра четвертого порядка и идея постановки этой задачи содержится в [7].

Заметим, что результаты исследований, изложенные в настоящей статье, могут найти применение при исследовании устойчивости процессов, протекающих в сплошных средах с памятью [8, 9].

***Литература***

1. *Искандаров С.* О влиянии вольтерровых интегральных возмущений на ограниченность решений линейных дифференциальных уравнений / С. Искандаров // Вестник КГНУ. Сер. естественно-техн. науки. Бишкек, 1998. Вып. 1. С. 83–87.

2. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.
3. *Искандаров С.* Об одном нестандартном методе исследования асимптотической устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2012. Вып. 44. С. 44–51.
4. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис…. д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
5. *Зубов В.И.* Теория уравнений управляемого движения: учеб. пособие / В.И. Зубов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с.
6. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.
7. *Искандаров С.* Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров // Вестник КРСУ. 2001. Т. 1. № 2. С. 46–53.
8. *Burton T.A.* Volterra Integral and Differential Equations. Second edition / T.A. Burton. Amsterdam: Elsevier, 2005. 368 p.
9. *Tunç C.* New results on the stabılıty, integrability and boundedness in Volterra integro-differential equations / C.Tunç, O.Tunç // Bull. Comput, Appl. Math. 2018. Vol. 6(1). P. 41–58.