УДК 517.97

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВОЛЬТЕРРА И СХОДИМОСТЬ ЕГО ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. Керимбеков, А.А. Анарбекова

Исследована краевая задача, описываемая интегро-дифференциальным волновым уравнением с интегральным оператором Вольтерра. На основе интегрального тождества построено обобщенное решение краевой задачи и доказана сходимость его приближений по резольвенте и конечномерные приближения. При решении прикладных задач управления более приемлемым оказалось понятие обобщенного решения. При построении обобщенного решения были использованы схемы, показанные в работах В.И. Плотникова и А.И. Егорова. Согласно этой схеме, задача Коши, полученная относительно коэффициента Фурье, сначала решается в специально выделенном подмножестве, затем продолжается на все множество с учетом слабой сходимости решения к начальным условиям. Полученные результаты могут быть полезными при решении прикладных задач оптимального управления и при разработке новых методов качественного исследования интегро-дифференциальных уравнений с оператором Вольтерра или Фредгольма.

Ключевые слова: обобщенное решение; оператор Вольтерра; интегральное тождество; резольвента; приближение по резольвенте; сходимость.

ВОЛЬТЕРРАНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ОПЕРАТОРУ МЕНЕН ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИН ЖАЛПЫЛАНГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫ ЖАНА АГА ЖАКЫНДАШТЫРУУЛАРДЫН ЖЫЙНАЛГЫЧТЫГЫ

А. Керимбеков, А.А. Анарбекова

Макалада Вольтерранын интегралдык оператору катышкан интегралдык-дифференциалдык теңдеме менен мүнөздөлгөн термелүүнүн чектик маселеси изилденген. Интегралдык теңдештиктин негизинде чектик маселенин жалпыланган чыгарылышы түзүлгөн жана анын резольвента боюнча жакындашууларынын жана акыркы чендүү жакындашууларынын жыйналгычтыгы далилденген. Башкаруунун колдонмо маселелерин чыгарууда жалпыланган чыгарылыш түшүнүгү алгылыктуу болду. Жалпыланган чыгарылышты түзүүдө В.И. Плотников жана А.И. Егоровдун макалаларында көрсөтүлгөн схемалар пайдаланылды. Бул схемага ылайык, Фурье коэффициентине ылайык алынган Коши маселеси, адегенде атайын бөлүнгөн көптүкчөдө чыгарылат, андан кийин чыгарылыштын баштапкы шартка солгун жыйналгычтыгын эске алуу менен бардык көптүктө улантылат. Алынган жыйынтыктар, оптималдык башкаруунун колдонмо маселелерин чыгарууда, ошондой эле Вольтерра же Фредгольм оператору бар интегралдык-дифференциалдык теңдемелерди сапаттуу изилдөөнүн жаңы методдорун иштеп чыгууда керек болушу мүмкүн.

Түйүндүү сөздөр: жалпыланган чыгарылышы; Вольтерранын оператору; интегралдык теңдештик; резольвента; резольвента боюнча жакындаштыруу; жыйналгычтык.

GENERAL SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH THE INTEGRAL VOLTERRA OPERATOR AND THE CONVERGENCE OF ITS APPROXIMATIONS

A. Kerimbekov, A.A. Anarbekova

The article investigates a boundary value problem described by an integro-differential wave equation with an integral Volterra operator. On the basis of the integral identity, a generalized solution of the boundary value problem is constructed and the convergence of its approximations with respect to the resolvent and finite-dimensional approximations are proved. When solving applied control problems, the concept of a generalized solution turned out to be more acceptable. When constructing a generalized solution the schemes were used indicated in the works of V.I. Plotnikov and A.I. Egorova. According to this scheme, the Cauchy problem obtained with respect to the Fourier coefficient is first solved in a specially selected subset, then continues to the entire set, taking into account the weak convergence of the solution to the initial conditions. The obtained results can be useful in solving applied optimal control problems and in developing new methods for the qualitative study of integro-differential equations with the Volterra or Fredholm operator.

Keywords: Generalized solution; Volterra operator; integral identity; resolvent; approximation by resolvent; convergence.

Рассмотрим колебательный процесс $v(t,x)$, описываемый интегро-дифференциальным уравнением

$$v_{tt} = v_{xx} + \lambda \int_0^t K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T \,, \tag{1}$$

и удовлетворяющий начальным

$$v(0,x) = \psi_1(x), \ \ v_t(0,x) = \psi_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

и граничным условиям:

$$v_x(t,0) = 0, \quad v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f\left[t, u(t)\right], \ \ 0 < t \le T, \tag{3}$$

где ядро $K(t,\tau)$ является элементом гильбертова пространства $H(D),\ D = \{0 \le t, \tau \le T\}$, квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве, причем

$$\sup_{0<t,\tau<T} \left| K(t,\tau) \right| = M, \quad M > 0, \tag{4}$$

заданная функция $f\left[t,u(t)\right]$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$ при известной функции $u(t)$; $\psi_1(x) \in H(0,1), \psi_2(x) \in H(0,1)$ – функции начального состояния, причем $\psi_1(x)$ имеет обобщенную производную первого порядка $\psi_1'(x) \in H(0,1)$; постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени; λ – параметр.

Определение. Функция $v(t,x) \in H(Q)$, $Q = (0,1)\times(0,T)$, имеющая обобщенные производные $v_t(t,x), v_x(t,x) \in H(Q)$, называется обобщенным решением краевой задачи (1)–(3), если удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(v_t \Phi\right)_{t_1}^{t_2} dx \equiv \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[v_t \Phi_t - v_x \Phi_x + \lambda \int_0^t K(t,\tau) v(\tau,x) d\tau \cdot \Phi(t,x) \right] dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[f\left[t,u(t)\right] - \alpha v(t,1) \right] \Phi(t,1) dt \end{aligned} \tag{5}$$

для любых t_1, $t_2\ (t_1 < t < t_2)$ и для любой функции $\Phi(t,x) \in H_1(Q)$, где $H_1(Q)$ – соболево пространство первого порядка, а также начальным и граничным условиям (2)–(3) в слабом смысле, т. е. соотношения

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^1 \left[v(t,x) - \psi_1(x) \right] \Phi_0(x) dx = 0, \ \ \lim_{t\to t_0} \int_0^1 \left[v_t(t,x) - \psi_2(x) \right] \Phi_1(x) dx = 0,$$

$$\lim_{x\to -1} \int_{t_1}^{t_2} \left(v_x(t,x) + \alpha v(t,x) - f[t,u(t)] \right) \Phi_2(t) dt = 0$$

выполняются для любых функций: $\Phi_0(x), \Phi_1(x) \in H(0,1)$ и $\Phi_2(t) \in H(0,T)$.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде ряда Фурье:

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x),\quad v_n(t)=\int_0^1 v(t,x)z_n(x)dx, \tag{6}$$

где $z_n(x)$ определяется как ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$z''+\lambda^2 z=0,\quad z'(0)=0,\ z'(1)+\alpha z(1)=0 \tag{7}$$

и имеет вид:

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}, \tag{8}$$

а соответствующие собственные значения λ_n определяются как решения трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют условиям:

$$\lambda_n\le\lambda_{n+1},\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty\quad \grave{e}\quad \left(n-1\right)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}\left(2n-1\right),\quad n=1,2,3,\dots. \tag{9}$$

На основе интегрального тождества (5), согласно схеме указанных в работах [1, 2], для определения коэффициентов Фурье $v_n(t)$ получим задачу Коши вида:

$$v_n''(t)+\lambda_n^2 v_n(t)=\lambda\int_0^t K\left(t,\tau\right)v_n\left(\tau\right)d\tau+z_n(1)f\left[t,u(t)\right],\ n=1,2,3,\dots,$$

$$v_n(t)\Big|_{t=t_1}=v_n(t_1)=\int_0^1 v(t_1,x)z_n(x)dx\xrightarrow[t_1\to 0]{}\int_0^1\psi_1(x)z_n(x)dx=\psi_{1n},$$

$$v_n'(t)\Big|_{t=t_1}=v_n'(t_1)=\int_0^1 v(t_1,x)z_n(x)dx\xrightarrow[t_1\to 0]{}\int_0^1\psi_2(x)z_n(x)dx=\psi_{2n},$$

которая в полосе $t_1\le t\le T$ имеет решение вида:

$$v_n(t)=v_n(t_1)\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}v_n'(t_1)\sin\lambda_n t+$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_{t_1}^{t}\sin\lambda_n(t-\tau)\left(z_n(1)f[\tau,u(\tau)]+\lambda\int_0^T K\left(\tau,s\right)v_n\left(s\right)ds\right)d\tau,\quad n=1,2,3,\dots.$$

Отсюда, устремляя $t_1\to 0$, и учитывая слабую сходимость начальных условий, находим, что

$$v_n(t)=\psi_{1n}(t_1)\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)\left(\lambda\int_0^\tau K\left(\tau,s\right)v_n\left(s\right)ds\right)d\tau+$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)z_n(1)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau, \tag{10}$$

где ψ_{1n},ψ_{2n} – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x),\psi_2(x)$. Это соотношение является линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода относительно неизвестной функции $v_n(t)$. Меняя порядок интегрирования, имеем равенство:

$$\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)\left(\lambda\int_0^\tau K\left(\tau,s\right)v_n\left(s\right)ds\right)d\tau=\int_0^t\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_s^t \sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau\right)v_n\left(s\right)ds,$$

учитывая которое, равенство (10) представим в следующем виде:

$$v_n(t)=\lambda\int_0^t K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{11}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_s^t \sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau,\ \ K_n(t,t)=K_n(s,s)=0\,, \tag{12}$$

а свободный член:

$$a_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)z_n(1)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\ . \tag{12.1}$$

Решение линейного неоднородного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (11) находим по формуле [3]:

$$v_n(t)=\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{13}$$

где $R_n(t,s,\lambda)$ – резольвента, которая определяется как сумма ряда Неймана:

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\quad n=1,2,3,...,\,. \tag{14}$$

Повторные (итерированные) ядра $K_{n,i}(t,s)$ находятся по формулам:

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_s^t K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\ \ K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s),\ n=1,2,3,...,\ i=1,2,3,.... \tag{15}$$

Исследуем сходимости ряда (14). Сначала установим следующие оценки:

1) $\left|K_{n,1}\left(t,s\right)\right|=\left|K_n\left(t,s\right)\right|=\left|\frac{1}{\lambda_n}\int_s^t \sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau\right|\le$

$$\le\frac{1}{\lambda_n}\int_s^t\left|\sin\lambda_n(t-\tau)\right|\left|K(\tau,s)\right|d\tau\le\frac{M}{\lambda_n}(t-s)\le\frac{MT}{\lambda_n}, \tag{16.1}$$

2) $\left|K_{n,2}\left(t,s\right)\right|=\left|\int_s^t K_n\left(t,\eta\right)K_{n1}\left(\eta,s\right)d\eta\right|\le\int_s^t\left|K\left(t,\eta\right)\right|\left|K_{n1}\left(\eta,s\right)\right|d\eta\le$

$$\leq \frac{MT}{\lambda_n}\int_s^t \frac{M}{\lambda_n}(\eta - s)d\eta \leq \frac{M^2T}{\lambda_n^2}\frac{(t-s)^2}{2}; \tag{16.2}$$

....

$$3)\ |K_{n,i}(t,s)| \leq \frac{M^iT^{i-1}}{\lambda_n^i}\frac{(t-s)^i}{i!} \leq \frac{M^iT^{2i-1}}{\lambda_n^i\, i!}; \tag{16.n}$$

$$4)\ \left|R_n(t,s,\lambda)\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|K_{ni}(t,s)\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\frac{M^iT^{i-1}}{\lambda_n^i}\frac{(t-s)^i}{i!} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{i-1}M^{i-1}(T^2)^{i-1}\cdot MT}{\lambda_n\cdot\lambda_n^{i-1}\cdot i!} \leq \frac{MT}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{|\lambda|M(T^2)}{\lambda_n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{(i-1)!} = \frac{MT}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}; \tag{17}$$

$$5)\ \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \leq \int_0^T\left(\frac{MT}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}\right)^2 ds = \frac{M^2T^3}{\lambda_n^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}. \tag{18}$$

Теперь покажем, что решение краевой задачи (1)–(3) $v(t,x)$, определяемое согласно формулам (6) и (13), является элементом пространства $H(Q)$.

Лемма 1. Решение краевой задачи (1)–(3) $v(t,x)$ при условиях задачи является элементом пространства $H(Q)$.

Доказательство. Используя оценки (17)–(18), непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\int_0^T\int_0^1 v^2(t,x)dxdt = \int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x)\right)^2 dxdt = \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2(t)dt \leq$$

$$\leq \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t)\right)^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda^2\int_0^T\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)dsdt\cdot\int_0^T a_n^2(s)ds + \int_0^T a_n^2(t)dt\right] \leq$$

$$\leq 6\left(\frac{\lambda^2M^2T^4}{\lambda_1^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}+1\right)T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}^2+\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\psi_{2n}^2+\int_0^T\sin^2\lambda_n(t-\tau)z_n^2(1)d\tau\cdot\int_0^T f^2[\tau,u(\tau)]d\tau\right)\right] \leq \tag{19}$$

$$\leq 6T\left(\frac{\lambda^2M^2T^4}{\lambda_1^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}+1\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2+2T\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right) \leq$$

$$\leq 6T\left(\frac{\lambda^2M^2T^4}{\lambda_1^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}+1\right)\left(\|\psi_1(x)\|_{H(0,1)}^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2 + 2T\|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}\right)\right) < \infty,$$

так как

$$\psi_{2n}^2=\left(\int_0^1\psi_2(x)z_n(x)dx\right)^2\le\int_0^1\psi_2(x)dx\cdot\int_0^1 z_n^2(x)dx=\int_0^1\psi_2^2(x)dx=\|\psi_2(x)\|_{H(0,1)}^2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2\pi^2}=\frac{1}{6}.$$

Из неравенства (19) следует утверждение леммы.

Поскольку резольвента $R(t,s,\lambda)$ и решение краевой задачи (1)–(3) определяются как сумма бесконечного функционального ряда, то установить их явный вид не всегда удается. Поэтому на практике используют их приближения, которые строятся с учетом заданных погрешностей. Отметим, что наличие интегрального оператора Вольтерра вносит коррективы при построении приближений обобщенного решения. В этом случае, помимо конечномерных приближений, которые используются на практике, необходимо учитывать и приближения по резольвенте. В этой связи, будем различать m -е приближения по резольвенте и конечномерные приближения обобщенного решения краевой задачи (1)–(3).

m -е приближения по резольвенте обобщенного решения определяются по формуле :

$$v^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right]z_n(x), \tag{20}$$

где $R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s).$

Лемма 2. m -е приближения по резольвенте сходятся к обобщенному решению по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Учитывая, что для остаточного члена сходящегося ряда (17) имеет место неравенство [4]:

$$\begin{gathered}R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\le\sum_{i=m+1}^{\infty}\left|\lambda^{i-1}\right|\left|K_{n,i}(t,s)\right|\le\\ \le\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{MT}{\lambda_n}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}\right)^{i-1}\frac{1}{(i-1)!}<\frac{MTe^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}}{\lambda_n}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}\right)^m\frac{1}{m!},\end{gathered} \tag{21}$$

и оценку:

$$\begin{gathered}\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]^2ds\le\int_0^T\left(\frac{MT}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}\right)^m\frac{1}{m!}\right)ds\le\\ \le T\left[\frac{MT}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}\right)^m\frac{1}{m!}\right]^2,\end{gathered} \tag{22}$$

непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\left\|v(t,x)-v_r(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\sum_n^\infty\left(\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x)-$$

$$-\sum_n^\infty\left\{\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)z_n(x)\right\}^2 dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^1\sum_{n=1}^\infty\left[\lambda\int_0^t\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]a_n(s)ds\cdot z_n(x)\right]^2 dxdt=$$

$$=\int_0^T\sum_{n=1}^\infty\lambda^2\int_0^T\left[R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)\right]^2 ds\cdot\int_0^T a_n^2(s)dsdt\le$$

$$\le T\sum_{n=1}^\infty\lambda^2 T\left[\frac{MT}{\lambda_n}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_n}\right)^m\frac{1}{m!}\right]^2\cdot\int_0^T a_n^2(s)ds\le$$

$$\le\lambda^2T^2\left[\frac{MT}{\lambda_1}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_1}\right)^m\frac{1}{m!}\right]\sum_{n=r+1}^\infty\int_0^T\Big(\psi_{1n}\cos\lambda_n s+$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left[\psi_{2n}\sin\lambda_n s+\int_0^s\sin\lambda_n(s-\tau)z_n(1)f[\tau,u(\tau)]d\tau\right]\Big)^2 ds\le$$

$$\le\lambda^2T^2\left[\frac{MT}{\lambda_1}e^{\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}\left(\frac{|\lambda|MT^2}{\lambda_1}\right)^m\frac{1}{m!}\right]3T\Big(\left\|\psi_1(x)\right\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+\left[\left\|\psi_2(x)\right\|^2_{H(0,1)}+2T\left\|f[t,u(t)]\right\|^2_{H(0,T)}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\Big)$$

из которого при $m\to\infty$ следует утверждение леммы.

m,r -е конечномерные приближения обобщенного решения определяются по формуле:

$$v_r^m(t,x)=\sum_{n=1}^r\left[\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right]z_n(x). \tag{23}$$

Лемма 3. m,r -е конечномерные приближения при любом фиксированном m сходятся m -му приближению $v^m(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$.

Доказательство. Вычисляя норму разности, имеем неравенство:

$$
\begin{aligned}
&\left\|v^m(t,x)-v_r^m(t,x)\right\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\{\left[\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right]z_n(x)\right\}^2dxdt\le\\
&\le\int_0^T\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t)\right)^2dt\le\\
&\le 2\int_0^T\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\{\lambda^2\int_0^T\left(R_n^m(t,s,\lambda)\right)^2ds\cdot\int_0^T a_n^2(s)ds+a_n^2(t)\right\}dt\le\\
&\le 2\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\{\lambda^2\int_0^T\int_0^T\left(R_n^m(t,s,\lambda)\right)^2dsdt+1\right\}\int_0^T a_n^2(t)dt\le\\
&\le 2\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\{\lambda^2\frac{M^2T^4}{\lambda_n^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_n}}+1\right\}3T\left(\psi_{1n}^2+\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\psi_{2n}^2+2T\left\|f[t,u(t)]\right\|^2_{H(0,T)}\right]\right)\le\\
&\le GT\left\{\lambda^2\frac{M^2T^4}{\lambda_1^2}e^{\frac{2|\lambda|MT^2}{\lambda_1}}+1\right\}\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\left[\left\|\psi_2(x)\right\|^2_{H(0,T)}+2T\left\|f[t,u(t)]\right\|^2_{H(0,T)}\right]\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Поскольку при $r\to\infty$

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\psi_{1n}^2\to 0 \text{ и } \sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\to 0,$$

как остаточные члены сходящихся рядов, то из (24), при $r\to\infty$ следует утверждение Леммы.

Сходимость конечномерного приближения к обобщенному решению следует из соотношения:

$$\left\|v(t,x)-v_r^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\le\left\|v(t,x)-v^m(t,x)\right\|_{H(Q)}+\left\|v^m(t,x)-v_r^m(t,x)\right\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,r\to\infty]{}0,$$

которое имеет место согласно леммам 2 и 3.

В заключение отметим, что наличие интегрального оператора Вольтерра в уравнении привело к необходимости исследования сходимости приближений по резольвенте обобщенного решения краевой задачи. Аналогичное обстоятельство имеет место и с интегральным оператором Фредгольма [5–8]. Наличие интегрального оператора обусловливает появление приближений по резольвенте независимо от уравнения краевой задачи. Таким образом, обнаруживается естественное явление, которое появляется при построении приближений обобщенных решений краевых задач, описываемых параболическими или гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Вольтерра или Фредгольма.

Литература

1. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 3. Вып. 4. С. 178–182.
2. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 464 с.
3. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 304 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 608 с.
5. *Керимбеков А.К.* Слабо обобщенное решение краевой задачи граничного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями / А.К. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 9. С. 23–27.

6. *Керимбеков А.* О разрешимости задачи граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э. // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. № 9. С. 28–32.
7. *Kerimbekov A.K.* Optimal distributed control for the processes of oscillation described by fredholm integro-differencial equations / A.K. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva // Eurasian mathematical journal. 2015. Vol. 6. № 2. P. 28–40.
8. *Керимбеков А.К.* О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями / А.К. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 163–176.