УДК 539.3

О КРИТЕРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ

М.К. Чыныбаев, П.М. Резин, Н.Б. Акматова

Приведена методика замены условия текучести при решении задачи упругопластического деформирования толстостенной трубы в случае идеальной пластичности и линейного упрочнения на основе условия пластичности М.Я. Леонова.

Ключевые слова: задача Ламе; условие текучести; напряженно-деформированное состояние; толстостенная труба; пластическая деформация.

ABOUT PLASTICITY`S CRITERIA IN CALCULATION OF THICK-WALLED PIPES

M.K. Chynybaev, P.M. Rezin, N.B. Akmatova

In this article the method of replacing the flow conditions in solving the problem of elastic-plastic deformation of a thick-walled tube in the case of ideal plasticity and linear hardening based the yield condition M.J. Leonov is given.

Keywords: Lame's problem; yield condition; the stress-strain state; thin-walled cylinder; plastic deformation.

В данной работе рассмотрена задача Ламе о напряженном состоянии толстостенной трубы, подвергнутой внутреннему давлению. Эта задача возникает, в частности, при автофретировании труб. При сопоставлении теоретических и экспериментальных исследований в указанном направлении установлено следующее. Классическое решение Ламе в случае наличия в трубе зоны пластической деформации материала не соответствует в достаточной мере эксперименту. По теории зоны упругости и пластичности в поперечном сечении трубы разделены концентрической окружностью. Радиус этой окружности и возникающие напряжения зависят от принимаемого условия текучести. При определенном соотношении между пределами текучести при растяжении и чистом сдвиге критерии текучести Губера–Мизеса и Треска–Сен-Венана совпадают. В действительности, область

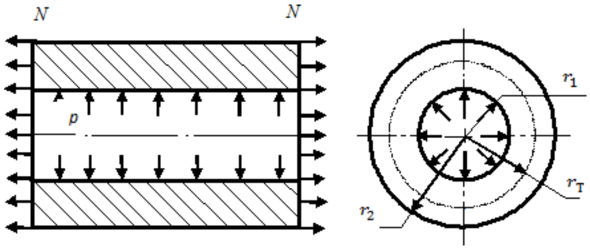

Рисунок 1 – Схема нагружения толстостенной трубы

пластической деформации и величины напряжений на ее границе, заметно зависят от характера деформационного упрочнения конструкционных пластичных материалов, которые не подчиняются указанным критериям текучести. В качестве первого приближения к решению сформулированной задачи обычно рассматривается несжимаемый материал в условиях идеальной пластичности с корректировкой условия текучести. Труба с закрытыми торцами нагружена внутренним давлением (рисунок 1).

Возникающие окружное (σ_θ), осевое (σ_z) и радиальное (σ_r) напряжения находятся в соответствии:

$$\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r \, . \tag{1}$$

Для несжимаемого материала, поскольку осевая деформация $\varepsilon_z = 0$, в соответствии с законом Гука для изотропного тела, имеем:

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_i) \, . \tag{2}$$

При этом условии интенсивность напряжений (σ_i), октаэдрическое касательное напряжение (τ_o) и максимальное касательное напряжение (τ_m), такова:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r), \; \tau_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sigma_\theta - \sigma_r),$$

$$\tau_m = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_r). \quad (3)$$

Вид напряженного состояния будем определять квазистационарным инвариантом m:

$$m = \frac{\tau_0}{\tau_m}. \quad (4)$$

Он выражается через параметр Лоде-Надаи для напряжений (μ_σ):

$$m = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3+\mu_\sigma^2}, \ \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}. \quad (5)$$

Согласно условию текучести Губера–Мизеса [1, (3.18)]:

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad (6)$$

где σ_τ – предел текучести при одноосном растяжении, т. е. в данном случае

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T. \quad (7)$$

В данной задаче обычно используется это условие и принимается гипотеза существования "единой" (не зависящей от вида напряженного состояния) зависимости: интенсивность напряжений – интенсивность деформаций $(\sigma_i \sim \varepsilon_i)$.

Однако для конструкционных материалов лучше выполняется условие текучести М.Я. Леонова [2]:

$$\tau_m = T - k\tau_0 \ (T,k - \text{const}). \quad (8)$$

Константы Т и k могут быть определены через предел текучести при растяжении ($\sigma_т$) и предел текучести при чистом сдвиге ($\tau_т$):

$$k = (\tau_T - \frac{1}{2}\sigma_T)/(\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_T - \sqrt{\frac{2}{3}}\tau_k);$$

$$T = \tau_T(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\tau_k). \quad (9)$$

Таким образом, вместо условия (7), согласно (8) и (9), получим:

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\tau_T. \quad (10)$$

При этом, согласно (3) и (4), $m = \sqrt{\frac{2}{3}}$, ($\mu_\sigma = 0$), т. е. реализуется состояние чистого сдвига, что вытекает и из формулы (10).

Радиальное и окружное напряжения в упругой области определяются по формулам [3]:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T(A - \frac{B}{r^2}), \ \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T(A + \frac{B}{r^2}). \quad (11)$$

Для определения напряжений в пластической области используется дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы [3]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (12)$$

и условие текучести (7). Это приводит к уравнению

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_T}{r}. \quad (13)$$

Интеграл этого уравнения имеет вид:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T(\ln\frac{r}{r_T} + C), \quad (14)$$

где – постоянная интегрирования.

Для двух других напряжений имеем:

$$\sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T(\ln\frac{r}{r_T} + C + 1), \quad (15)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T(\ln\frac{r}{r_T} + C + \frac{1}{2}). \quad (16)$$

Для определения постоянных A,B,C и неизвестного радиуса границы, разделяющей упругую и пластическую области ($r_т$), используются краевые условия:

1) при $r = r_1$, $\sigma_r = -p$,
2) при $r = r_2$, $\sigma_r = 0$,
3) при $r = r_T$, $\sigma_r^p = \sigma_r^e$,
4) при $r = r_T$, $\sigma_t^p = \sigma_t^e$.

Не выписывая определяемых таким образом постоянных, можно уже дать оценку напряжений $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_z$, если вместо условия текучести (7) использовать условие (10). Предварительно рассмотрим определение радиального перемещения.

Радиальная и окружная деформации связаны с радиальным перемещением u и радиусом r соотношениями:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \ \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad (17)$$

откуда

$$u = \varepsilon_t r. \quad (18)$$

Исходя из выражений и (17), может быть получено дифференциальное уравнение для радиального перемещения, справедливое как в упругой, так и в пластической областях. Поэтому зависимость радиального перемещения от радиуса может быть установлена по формуле (18) с использованием закона Гука и величин напряжений в упругой области:

$$u = \frac{r}{E}\left[\sigma_t - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r)\right], \quad (19)$$

где E – модуль Юнга.

Подстановкой в это выражение напряжений, получена [1] зависимость радиального перемещения от радиуса, справедливая как в упругой, так и в пластической областях:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sigma_T}{E}\frac{r_T^2}{r}. \quad (20)$$

В результате, для случая идеальной пластичности (при отсутствии упрочнения) на границе упруго-пластической зоны напряжения $\sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_r$, если задать $\tau_T = 0{,}556\sigma_T$ (как это имеет место [4] для стали 45), уменьшатся (по модулю) примерно на ≈4,74 % по сравнению с их значениями, вычисляемыми по формулам (14)–(16); а радиальное перемещение u увеличится на ≈ 4,97 % по сравнению со значением (20). На рисунке 2 показаны эпюры напряжений в пластической и упругой областях при разных условиях текучести (пунктирная линия – при условии текучести М.Я. Леонова) для значения $r_T = 1{,}4r_1$.

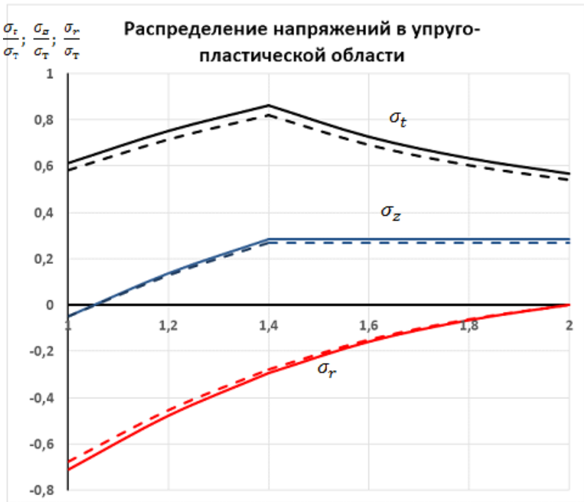

Рисунок 2 – Эпюра главных напряжений

Для трубы при $r_2 = 2r_1$ напряжение σ_z (после определения постоянных *A,B,C*) представлено [8] в виде:

$$\sigma_z = \tau_T \left(\frac{r_T}{r_2}\right)^2. \quad (21)$$

При условии текучести (7) в момент возникновения пластической зоны (т. е. при $r_T / r_1 = 1$) имеем:

$$\sigma_z = 0{,}1445\sigma_T. \quad (22)$$

Если это значение напряжения σ_z отнести к пределу текучести на растяжение, определяемого по критерию М.Я. Леонова (т. е. полагая $\tau_T = 0{,}55\sigma_T$), то получим:

$$r_T / r_1 = 1{,}026. \quad (23)$$

Это обстоятельство ещё раз подчеркивает более раннее возникновение пластичности по толщине трубы при использовании критерия М.Я. Леонова вместо критерия Губера–Мизеса.

При учете упрочнения материала обычно используется гипотеза о пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций и допущение о существовании “единой” диаграммы деформации в обобщенных координатах “интенсивность напряжений ~ интенсивность деформаций”. Это допущение не в полной мере соответствует поведению конструкционных материалов. Оно может быть заменено менее строгим ограничением. Указанная пропорциональность девиаторов возможна и при условии, что коэффициент пропорциональности между ними зависит от вида напряженного состояния. Примером является следующая простейшая деформационная зависимость [2]:

$$D_Г = \frac{1}{E'}\left(1 - \frac{\tau_T(m)}{\tau_m}\right)D_T, \quad (24)$$

где $D_Г$ – девиатор пластической составляющей деформации, D_T – девиатор напряжений; $\tau_T(m)$– предел текучести при рассматриваемом виде напряженного состояния (m); E – пластический касательный модуль при растяжении.

Зависимость (21) – следствие постулата “инвариантности упрочнения” [5]. Последний является обобщением постулата изотропии А.А. Ильюшина на случай произвольного условия текучести типа (8). При этом для перехода от одного напряженно-деформированного состояния к другому используются не только преобразования отражения и вращения, но и ещё одно ортогональное [6] преобразование – трансляция. Трансляция (в пятимерном пространстве Ильюшина) предусматривается для вектора, представляющего собой по модулю разность между текущим значением интенсивности напряжений и её величиной на пределе текучести при одном и том же виде напряженного состояния. В частности, в случае линейного упрочнения должно выполняться соотношение:

$$G' = \frac{1}{3}E', \quad (25)$$

где G – пластический касательный модуль при чистом сдвиге (кручении тонкостенной трубки).

Таким образом, задавая закон упрочнения и используя соотношения (24), определим напряжения в пластической области деформации толстостенной трубы по методике, изложенной в [1]. При этом, как указано в [1], упрочнение не влияет на законы распределения напряжений в упругой области и на радиальные перемещения в упругой и пластической областях.

Выводы. При сравнении результатов, полученных с помощью критерия Губера–Мизеса и критерия М.Я. Леонова, получено, что при одном и том же уровне распространения зоны пластической деформации все три главных напряжения уменьшаются по модулю на ≈5 %, вследствие этого начало зоны пластической деформации возникает при меньшем давлении, описываемом критерием Губера–Мизеса. Иначе говоря, зона пластической деформации распространяется по поперечному сечению трубы быстрее, чем предполагается при использовании критерия Губера–Мизеса. Именно поэтому, как указано в [7], в процессе автофретирования (описываемом с помощью критерия Губера–Мизеса) оператору необходимо следить за скоростью распространения пластической деформации по поверхности трубы визуально, поскольку переход толстостенной трубы в полностью пластическое состояние приводит к потере ею несущей способности, и труба отправляется на переплавку[1].

Литература

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
2. *Леонов М.Я.* Прочность и устойчивость механических систем: актуальные задачи нелинейной механики / М.Я. Леонов. Фрунзе: Илим, 1987. 279 с.
3. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. М.: Наука, 1974. 559 с.
4. *Комарцов Н.М., Рычков Б.А.* Концепция скольжения и механика пластической деформации / Н.М. Комарцов, Б.А. Рычков // LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany. 2011. 176 с.
5. *Рычков Б.А.* Постулат “инвариантности упрочнения” / Б.А. Рычков // Известия НАН КР. 1991. № 2. С. 42–53.
6. *Маделунг Г.Э.* Математический аппарат физики / Г.Э. Маделунг. М.: Физматгиз, 1960. 620 с.
7. *Hill R. (Rodney).* The mathematical theory of plasticity / R. (Rodney) Hill. Oxford: Clarendon Press; New York: Oxford University Press, 1964. 355 p.
8. *Малинин Н.Н.* Сборник задач по прикладной теории пластичности и ползучести: учеб. пособие для машиностр. спец. вузов / Н.Н. Малинин, К.И. Романов, А.А. Ширшов. М.: Высшая школа, 1984. 231 с.

[1] Авторы выражают признательность д.ф.-м.н., проф. Б.А. Рычкову за внесенный вклад в достигнутые научные результаты.