

УДК 532.1:517.923  
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-8-20-27

## ДИНАМИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ, ВЫТЕКАЮЩЕЙ ИЗ НЕБОЛЬШОГО КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ

*Б. Чечейбаев, Н.Т. Эстебесова*

*Аннотация.* Найдены точные решения уравнения гидродинамического пограничного слоя течения несжимаемой жидкости для произвольной функции градиента давления. Определены функции тока и распределение поля скоростей в цилиндрической системе координат. Точное решение дифференциального уравнения в частных производных ищется в автомодельном виде и относительно неизвестной функции получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка. Градиенты давления принимались равными  $f(x) = Ax^k$ , где  $A$  – постоянная величина. При значении  $k = -3$  рассматриваемое уравнение интегрируется в квадратурах и полученным решением описывается осесимметричная струя. Определены функции тока, составляющие вектора скорости, поток импульсов, картина линий тока и профиля скорости, объём жидкости, протекающей в струе за одну секунду. Найдено решение уравнения асимметричного нестационарного пограничного слоя, описывающее нестационарное течение несжимаемой вязкой жидкости на протяженном теле вращения.

*Ключевые слова:* уравнение Рикатти; функция тока; градиент давления; несжимаемая жидкость.

---

## АНЧА ЧОҢ ЭМЕС ТЕГЕРЕК ТЕШИКТЕН ЧЫККАН АГЫМДЫН ОККО СИММЕТРИЯЛУУ ДИНАМИКАСЫ

*Б. Чечейбаев, Н.Т. Эстебесова*

*Аннотация.* Басым градиентинин ыктыярдуу функциясы үчүн кысылбай турган суюктуктун агымынын гидродинамикалык чектик катмарынын теңдемесинин так чыгарылыштары табылды. Цилиндрик координаттар системасындагы токтун функциялары жана ылдамдык талаасынын бөлүштүрүлүшү аныкталды. Дифференциалдык теңдемелер жарым-жартылай туундуларындагы так чыгарылышы автомодель түрүндө изделет жана салыштырмалуу белгисиз функция үчүнчү тартиптеги сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдеме алынат. Басым градиенттери  $f(x) = Ax^k$  барабар кабыл алынган, мында  $A$  – туруктуу чоңдук.  $k = -3$  маанисинде сөз болуп жаткан теңдеме квадраттарга интеграцияланып, табылган чыгарылыш окко карата симметриялуу ажыралып чаккан агымды мүнөздөйт. Ылдамдык векторун түзгөн токтун функциялары, импульстардын агымы, ток сызыктарынын сүрөтү жана ылдамдык профили, бир секундада агымда агып жаткан суюктуктун көлөмү аныкталды. Симметриялык эмес стационардык чек ара катмарынын теңдемесинин кеңейтилген айлануу денесиндеги кысылбай турган илешкектүү суюктуктун стационардык эмес агымын сүрөттөгөн чыгарылыштар табылды.

*Түйүндүү сөздөр:* Рикатти теңдемеси; ток функциясы; басымдын градиенти; кысылбоочу суюктук.

---

## DYNAMIC OF AXISYMMETRIC STREAM FLOWING OUT OF A SMALL ROUND HOLE

*B. Checheibaev, N.T. Estebesova*

*Abstract.* Exact solutions of the equation of the hydrodynamic boundary layer of the incompressible fluid flow for an arbitrary function of the pressure gradient are found. The functions of the current and the distribution of the velocity field in the cylindrical coordinate system are determined. Further, the exact solution of the partial differential equation is sought in a self-similar form and a nonlinear ordinary differential equation of the third order is obtained with respect to an unknown function. The pressure gradients were assumed to be equal  $f(x) = Ax^k$ , where  $A$  – is a constant value. At a value of, the equation in question is integrated in quadratures and the resulting solution describes an axisymmetric

jet. The solution found by the method of separation of variables and presented in cylindrical variables determines the boundary layer of the stationary flow of a viscous fluid on an extended body of rotation. In the case, the solution of the differential equation is sought in a self-similar form and the solution found at the value of the self-similarity index also determines the axisymmetric jet flowing out of the round hole. The functions of the current, the components of the velocity vector, the pulse flow are determined. a picture of the current lines and velocity profile, the volume of liquid flowing in the jet in one second. The solution of the equation of an asymmetric unsteady boundary layer describing the unsteady flow of an incompressible viscous fluid on an extended body of rotation is found.

*Keywords:* Riccati equation; flow function, pressure gradient; incompressible fluid.

Система уравнений стационарного осесимметричного ламинарного пограничного слоя имеет следующий вид [1]:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (2)$$

где  $u$  и  $v$  – осевая и радиальная компоненты скорости несжимаемой жидкости,  $x$  и  $r$  – цилиндрические координаты.

Введем функцию тока  $\psi(x, r)$  и новую переменную  $y$  по формулам:

$$u = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad y = \frac{1}{4} r^2, \quad (3)$$

тогда рассматриваемое уравнение преобразуется к одному уравнению:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = v \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + f(x). \quad (4)$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости.

Система уравнений, состоящая из уравнений (1), (2), (4) используется для описания динамики осесимметричной струи и пограничного слоя на протяжённом теле вращения. Функция  $f(x)$  определяется через продольную скорость жидкости  $U = U(x)$  в невязком потоке из соотношения  $f(x) = UU'(x)$ .

Граничными условиями для системы уравнений (1), (2) будут служить равенства:

$$\left. \begin{array}{l} v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \\ u = 0 \quad \quad \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Точные решения уравнения (4) для произвольной функции  $f(x)$ , выражающей градиент давления (линейные и квадратичные по  $y$ ), ищутся соответственно в следующих формах:

$$\psi(x, y) = yw(x) + \varphi(x) + C, \quad (6)$$

$$\psi(x, y) = y^2 w(x) + yw(x) + \varphi_2(x) + C. \quad (7)$$

Далее, интегрируя уравнение пограничного слоя в форме (6), получаем следующее решение:

$$\psi(x, y) = \pm y \left[ 2 \int f(x) dx + C \right]^{\frac{1}{2}} + \varphi(x). \quad (8)$$

Здесь,  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – произвольные функции;  $C$  – постоянная интегрирования.

Решение уравнения (4), квадратичное относительно переменной  $y$ , может быть выражено так:

$$\psi(x, y) = C_1 y^2 + y \left\{ 4\nu C_1 x + 4C_1 \varphi(x) + 2 \int f(x) dx + C_2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \varphi(x), \quad (9)$$

где  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  – произвольные функции;  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования.

Осуществляя обратный переход к цилиндрической системе координат, функцию тока  $\psi(x, r)$  представляем в следующем виде:

$$\psi(x, r) = \pm \frac{r^2}{4} \left[ 2 \int f(x) dx + C \right]^{\frac{1}{2}} + \varphi(x), \quad (10)$$

$$\psi(x, r) = \frac{C_1}{16} r^4 + \frac{1}{4} r^2 \left[ 4\nu C_1 x + 4C_1 \varphi(x) + 2 \int f(x) dx + C_2 \right]^{\frac{1}{2}} + \varphi(x). \quad (11)$$

Осевая  $u$  и радиальная  $v$  составляющие скорости несжимаемой жидкости, согласно формулам (3) выражаются так:

$$u = \pm \left[ 2 \int f(x) dx + C \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$$v = -\frac{r}{2} \left[ 2 \int f(x) dx + C \right]^{-\frac{1}{2}} f(x) - \frac{2}{r} \varphi'(x).$$

Аналогичным образом, осевая и радиальная составляющие скорости, определяемые согласно функции тока (11), выражаются следующим образом:

$$u = \frac{C_1 r^2}{4} + \left\{ 4C_1 \nu x + 4C_1 \varphi(x) + 2 \int f(x) dx + C_2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$v = -\frac{r}{2} \left( C_1 \nu x + C_1 \varphi(x) + \frac{1}{2} \int f(x) dx + \frac{C_2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( C_1 \nu + C_1 \varphi'(x) + \frac{f(x)}{2} \right) - \frac{2}{r} \varphi'(x).$$

Теперь точное решение уравнения (4) будем искать в автомодельном виде:

$$\psi(x, y) = xR(\eta), \quad \eta = yx^{\frac{k-1}{2}}, \quad (14)$$

где  $\eta$  – автомодельная переменная, показатель автомодельности.

Подставляя искомый вид решения (14) в уравнение (4), относительно неизвестной функции  $R(\eta)$ , получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\nu \left( \eta R''_{\eta\eta} \right)' + R R''_{\eta\eta} - \frac{1}{2} (k+1) \left( R'_\eta \right)^2 - A = 0. \quad (15)$$

Здесь для вывода уравнения (15) градиент давления принимался равным:  $f(x) = Ax^k$ , где  $A$  – постоянная величина.

Если параметр  $k$  принимает значение, равное  $k = -3$ , то уравнение (15) приводится к уравнению в полных дифференциалах, и после однократного интегрирования получаем:

$$RR_{\eta}'' + v\eta R_{\eta\eta}'' = C_1 + A\eta, \tag{16}$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Находим далее общее решение уравнения, получающееся при  $C_1 = A = 0$ :

$$RR_{\eta}' + v\eta R_{\eta\eta}' = 0. \tag{17}$$

Введём новую неизвестную функцию  $\omega(\xi)$  и переменную  $\xi$  следующим образом:

$$R(\eta) = \omega(\xi), \quad \xi = \ln \zeta. \tag{18}$$

Тогда рассматриваемое уравнение приводится относительно функции  $\omega(\xi)$  к виду

$$\omega(\xi)\omega'(\xi) - v\omega'(\xi) + v\omega''(\xi) = 0. \tag{19}$$

Здесь также введем неизвестную функцию  $\theta(\xi)$ , которая представляется с помощью дифференциального соотношения:

$$\theta(\xi) = v\omega'(\xi) - v\omega(\xi) + \frac{1}{2}\omega^2(\xi). \tag{20}$$

В этом случае, после интегрирования, получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати:

$$2v\omega'(\xi) + \omega^2(\xi) - 2v\omega(\xi) = C_0, \tag{21}$$

где  $C_0$  – постоянная интегрирования.

Полагая, что  $C_0 = 0$ , получаем уравнение с разделяющимися переменными, интегралом которого является следующее выражение:

$$\frac{\omega(\xi) - 2v}{\omega(\xi)} = C_1 e^{-\xi} = \frac{C_1}{\eta}. \tag{22}$$

Учитывая преобразование (18), находим общее решение уравнения (17) в следующем виде:

$$R(\eta) = \frac{2v\eta}{\eta + C_1}. \tag{23}$$

Согласно преобразованию (14) функция тока выражается так [2]:

$$\psi(x, y) = \frac{2v y x}{y + Cx^2}.$$

Если считать, что  $C_0 = -v^2$ , то уравнение (17) будет иметь следующее решение:

$$R(\eta) = \frac{2v}{\ln \eta + 2C_1} + v = \frac{v \ln \eta + 2(C_1 v + 1)v}{\ln \eta + 2C_1}. \tag{24}$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнение (16), считая, что функция  $f(x) = -Ax^k$ , и пусть коэффициент  $A > 0$ ,  $C_1 \neq 0$ . В результате применения вышеуказанных преобразований относительно

неизвестной функции  $\omega(\xi)$ , получаем неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, то есть общее уравнение Риккати:

$$v\omega'(\xi) - v\omega(\xi) + \frac{1}{2}\omega^2(\xi) = -\frac{A}{2}e^{2\xi} + C_1e^\xi + C_2. \quad (25)$$

Теперь решение рассматриваемого уравнения (4) будем искать методом разделения переменных в виде суммы функций от разных переменных  $x, y$  так:

$$\psi(x, y) = \xi(x) + \theta(y). \quad (26)$$

В этом случае функция тока для несжимаемой жидкости определяется следующим образом:

$$\psi(x, y) = -vx - \frac{a}{v} \frac{y^2}{4} + C_2y + C_3 \ln y + C_1, \quad (27)$$

а в цилиндрических переменных  $x, r$  функция тока выражается так:

$$\psi(x, r) = -vx - \frac{a}{v} \frac{r^4}{64} + C_2 \frac{r^2}{4} + C_3 \ln \frac{r^2}{4} + C_1. \quad (28)$$

Тогда осевая и радиальная составляющие скорости описываются следующими формулами:

$$u = -\frac{a}{8v} r^2 + \frac{4C_3}{r^2}, \quad v = \frac{2v}{r}. \quad (29)$$

Из условия ограниченности скорости на оси трубы при  $r = 0$ , следует, что  $C_3 = 0$  и убеждаемся, что выражение приведет к профилю скоростей, которым является окружность [3].

Теперь поиск решения рассматриваемого уравнения (4) будет проводиться в форме [4]:

$$\psi(x, y) = x^p F(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x^n}, \quad (30)$$

где  $F(\eta)$  – неизвестная функция;  $p, n$  показатели автомодельности.

Подстановка предполагаемого решения (30) в уравнение (4) при  $f(x) = 0$ , приводит нас к следующему дифференциальному уравнению:

$$x^{2p-2n-1} \left\{ (p-n) \left( \frac{dF}{d\eta} \right)^2 - F(\eta) \frac{d^2F}{d\eta^2} \right\} = x^{p-2n} v \left( \frac{d^2F}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3F}{d\eta^3} \right). \quad (31)$$

Отсюда, приравнявая показатели степеней при переменной  $x$ , получаем:

$$2p - 2n - 1 = p - 2n.$$

При  $p = 1$  имеем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка относительно функции  $F(\eta)$  в следующем виде:

$$(1-n) \left( \frac{dF}{d\eta} \right)^2 - F(\eta) \frac{d^2F}{d\eta^2} = v \left( \frac{d^2F}{d\eta^2} + \eta \frac{d^3F}{d\eta^3} \right). \quad (32)$$

Здесь параметр  $n$  может принимать произвольное допустимое значение.

Если положить, что  $n = 2$ , тогда из (32) вытекает следующее уравнение:

$$-\left(\left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 + F(\eta)\frac{d^2F}{d\eta^2}\right) = v\left(\frac{d^2F}{d\eta^2} + \eta\frac{d^3F}{d\eta^3}\right).$$

Далее, после однократного интегрирования, получаем, что

$$FF'_\eta + v\eta F''_{\eta\eta} = 0. \tag{33}$$

Общим интегралом полученного уравнения является функция, которая полностью совпадает с решением (23):

$$F(\eta) = \frac{2v\eta}{\eta + C}.$$

Далее, осуществляя преобразования согласно формулам (30), определяем выражение для функции тока и составляющих скоростей в переменных  $x, y$

$$\psi(x, y) = \frac{2vux}{y + Cx^2}, \quad u = \frac{2vCx^3}{(y + Cx^2)^2}, \quad v = -\frac{2vy(y - Cx^2)}{(y + Cx^2)^2}. \tag{34}$$

В цилиндрических координатах функция тока  $\psi(x, r)$  принимает следующий вид:

$$\psi(x, r) = \frac{2vxr^2}{r^2 + 4Cx^2}. \tag{35}$$

Следовательно, составляющие скорости, согласно уравнению (4), будут выражаться следующим образом:

$$u = \frac{8\tilde{C}vx^3}{(r^2 + \tilde{C}x^2)^2}, \quad v = -\frac{4vr(r^2 - \tilde{C}x^2)}{(r^2 + \tilde{C}x^2)^2}. \tag{36}$$

Здесь  $\tilde{C} = 4C$  – постоянная интегрирования.

С помощью найденного решения (35) описывается динамика круглой струи, вытекающей из круглого отверстия и смешивающейся затем с окружающей покоящейся жидкостью [2]. В действительности, движение круглой струи почти всегда представляет собой турбулентный поток.

Давление в круглой струе можно принять постоянным. Выберем систему координат так, чтобы начало координат было размещено в отверстии, а ось  $x$  совмещается с осью струи.

Радиальное расстояние в струе будем измерять координатой  $r$ . Вследствие постоянства давления, поток импульсов в направлении  $x$  постоянен и равен:

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 r dr = 128\pi\rho\tilde{C}^2 v^2 x^2 \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + \tilde{C}x^2)^4} = \frac{64}{3}\pi\rho v^2.$$

Картина линий тока и профиля скорости, построенная на основании формул (35) и (36), показана на рисунке 1.

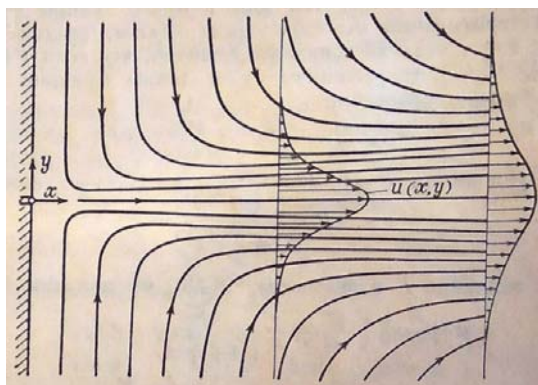


Рисунок 1 – Картина линий тока и профиля скорости

Вследствие действия трения, струя захватывает с боков некоторую часть покоящейся жидкости. В результате возникает течение, картина линий тока которого показана на рисунке 1.

Объем жидкости, протекающей в струе за одну секунду, равен:

$$Q = 2\pi \int_0^{\infty} ur dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{8v\tilde{C}x^3 r dr}{(r^2 + \tilde{C}x^2)} = \left( -8\pi v x^3 \frac{1}{r^2 + \tilde{C}x^2} \right) \Big|_0^{\infty} = 8\pi v x.$$

Очевидно, что с удалением от отверстия, возрастает расход  $Q$  вследствие бокового протекания жидкости. Количество жидкости, протекающей через определенное сечение, не зависит от давления, под которым струя вытекает из отверстия.

Система уравнений осесимметрического нестационарного пограничного слоя имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + f(x, y), \quad (37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (38)$$

где  $u$  и  $v$  – осевая и радиальная скорости жидкости;  $x$  и  $r$  – цилиндрические координаты, полученные путем введения функции тока  $\psi(x, r, t)$  новой переменной  $z$  по формулам:

$$u = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{4} r^2, \quad (39)$$

приводится к уравнению:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \nu \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + f(x, t). \quad (40)$$

Система уравнений (37), (39), (40) в случае  $f(x, t) \neq 0$  описывает пограничный слой на протяженном теле.

Рассмотрим точное решение (квадратичное по  $z$ ) уравнения (40) для произвольной  $f(x, t)$  представляемое в следующем виде:

$$\psi(x, z, t) = Cz^2 + \varphi(x, t)z + \frac{1}{4C}\varphi^2(x, t) + \frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x, t)dx - \frac{1}{2c}\int f(x, t)dx - vx + \tilde{\varphi}(t). \quad (41)$$

где  $\varphi(x, t)$  и  $\tilde{\varphi}(t)$  – произвольные функции;  $C$  – произвольная постоянная. Переходя согласно преобразованиям (34) к цилиндрическим координатам  $x$  и  $r$ , функцию тока  $\psi(x, r, t)$  представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(x, r, t) = & \frac{C}{16}r^4 + \frac{1}{4}r^2\varphi(x, t) + \frac{1}{4C}\varphi^2(x, t) + \\ & + \frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x, t)dx - \frac{1}{2c}\int f(x, t)dx - vx + \tilde{\varphi}(t). \end{aligned} \quad (42)$$

Продольная  $u$  и поперечная  $v$  составляющие скорости течения жидкости определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u = & \frac{C}{2}r^2 + \varphi(x, t), \\ v = & -\frac{2}{r}\left(\frac{r^2}{4}\varphi'_x(x, t) + \frac{1}{2C}\varphi(x, t)\varphi'_x(x, t) + \frac{1}{2C}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi(x, t)dx\right) - \frac{1}{2C}f(x, t) - v\right); \end{aligned} \quad (43)$$

из формул распределения скоростей (13), (29), (43) следует, что профиль скорости  $u$  представляет собой окружность радиуса  $r$ .

**Выводы.** Определены точные аналитические решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка, выведенного относительно функции тока. Найдены решения, описывающие динамику осесимметричной струи и пограничного слоя стационарного течения несжимаемой жидкости на протяженном теле вращения. Определены выражения для функции тока и распределения поля скоростей, описывающие осесимметричный пограничный слой нестационарного течения несжимаемой жидкости на протяженном теле вращения.

Поступила: 17.03.22; рецензирована: 31.03.22; принята: 04.04.22.

#### Литература

1. Полянин А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. М.: Наука, 1974. 12 с.
3. Исманбаев А.И. Метод малых возмущений для решения задачи ламинарного пограничного слоя течения несжимаемой вязкой жидкости / А.И. Исманбаев, Б. Чечейбаев, Н.Т. Эстебесова, Э.Б. Чечейбаева // Вестник КГУСТА. 2019. № 4 (66).
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. М.: Наука, 1960.