УДК 622.271 DOI: 10.36979/1694-500Х-2022-22-8-172-180

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ СОСТОЯНИЯ ПРИРОДНЫХ И ГОРНОТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

### Л.А. Назарова, Л.А. Назаров

Аннотация. Предложен универсальный подход к диагностике состояния геотехнических объектов и количественной оценке определяющих параметров геомеханических моделей, основанный на формулировке и исследовании разрешимости обратных задач. Разработана и численно реализована нелинейная модель, описывающая процессы деформирования и тепломассопереноса в породном массиве в окрестности высокогорного рудника, в рамках которой решена иллюстрирующая предложенный подход задача мониторинга целостности противофильтрационного экрана защитной дамбы хвостохранилища по пьезометрическим данным.

*Ключевые слова:* породный массив; деформирование; тепломассоперенос; обратная задача; рудник; диагностика состояния; пьезометрические данные; противофильтрационный экран.

## ЖАРАТЫЛЫШ ЖАНА ТОО-КЕН ТЕХНИКАЛЫК ОБЪЕКТИЛЕРИНИН АБАЛЫН АНЫКТООНУН ТЕСКЕРИ МИЛДЕТТЕРИ

### Л.А. Назарова, Л.А. Назаров

Аннотация. Сызыктуу эмес модель иштелип чыккан жана сандык түрдө ишке ашырылган, ал бийик тоо кенинин тегерегиндеги тоо тектеринде деформация жана жылуулук массасын өткөрүү процесстерин сүрөттөйт, анын алкагында калдык сактоочу жайдын коргоочу дамбасынын фильтрлөөгө каршы экранынын бүтүндүгүн пьезометриялык маалыматтар боюнча мониторинг жүргүзүү милдети сунушталган иллюстрациялык ыкма чечилди.

*Түйүндүү сөздөр:* тоо тектеринин массиви; деформация; жылуулук массасын өткөрүү; тескери тапшырма; кен; абалды аныктоо; пьезометриялык маалыматтар; фильтрацияга каршы экран.

## INVERSE PROBLEMS FOR DIAGNOSTICS OF NATURALAND MINE TECHNICAL OBJECTS STATE

### L.A. Nazarova, L.A. Nazarov

Abstract. A universal approach to the diagnosis of the state of geotechnical objects and the quantitative assessment of the defining parameters of geomechanical models based on the formulation and study of the solvability of inverse problems is proposed. A nonlinear model describing the processes of deformation and heat and mass transfer in a rock mass in the vicinity of a high-altitude mine has been developed and numerically implemented, within the framework of which the problem of monitoring the integrity of the anti-filtration screen of the protective dam of the tailings dam according to piezometric data illustrating the proposed approach has been solved.

Keywords: rock mass; deformation; heat and mass transfer; inverse problem; mine; state diagnostic; piezometric data; impervious screen.

**Введение.** Геомеханическое обоснование технологий разработки месторождений углеводородов и твердых полезных ископаемых, оценка устойчивости подземных сооружений и бортов карьеров при открытых горных работах, геодинамическое районирование территорий, интерпретация данных мониторинга промышленных и гражданских объектов – вот далеко не полный перечень проблем, для

решения которых необходима оценка деформационно-прочностных свойств породного массива, фильтрационно-емкостных характеристик продуктивных пластов, а также параметров физических полей, описывающих текущее состояние геотехнических систем. Для этого существуют два подхода: І) традиционный [1], когда свойства пород определяются экспериментально, а граничные условия задаются на основе прямой (измерения смещений и напряжений in situ [2]) или косвенной (как правило, геофизической [3]) информации; II) комплексная инверсия лабораторных и натурных данных, посредством минимизации целевой функции [4]. Второй подход обладает высокой степенью универсальности, поскольку позволяет в рамках единой математической модели использовать данные различной физической природы (электромагнитные, температурные, гидродинамические). Это достигается введением подходящих целевых функций:

$$\Phi(p_m) = \sum_s \alpha_s \sum_i \left[1 - w_s(x_i, p_m) / W_s(x_i)\right]^2,$$

где  $p_m$  (m = 1,...,M) – подлежащие определению свободные параметры модели;  $W_s$  – измеренные в точках наблюдений  $x_i$  (i = 1,...,I) – входные данные. В точке минимума ( $p_1^*,...,p_m^*$ ) функции F обеспечивается наилучшее соответствие  $W_s$  и результатов моделирования  $w_s$ . Надлежащий подбор неотрицательных весовых коэффициентов  $a_s$  ( $a_1+...+a_s = 1$ ) позволяет учесть качество входной информации различного типа (например, относительную точность величин  $W_k$ , полученных измерительными методами, которые основаны на различных физических принципах), а также во многих случаях обеспечить унимодальность F.

Следует отметить некоторые особенности реализации подхода II.

1. Геомеханические процессы при добыче полезных ископаемых и эксплуатации геотехнических объектов – квазистационарные, поэтому сравнительно невелик объем входных данных (определяющий, в частности, число аргументов *M* целевой функции F), который можно получить за ограниченный промежуток времени. Стоимость информации при проведении натурных геомеханических экспериментов значительно превышает таковую при сейсмо- или электроразведке.

2. При исследовании крупномасштабных геологических объектов (литосферные плиты, тектонические разломы) точечные измерения напряжений практически бесполезны, поэтому целесообразно использовать спутниковые (SAR, GPS) и сейсмологические (траектории сейсмотектонических деформаций) данные в качестве входной информации.

В настоящей работе на примере золоторудного месторождения «Кумтор» (Кыргызская Республика) реализован второй подход – решена обратная задача диагностики состояния противофильтрационного экрана хвостохранилища по пьезометрическим данным.

*Местоположение, климатические условия и схема отработки объекта.* Золоторудное месторождение «Кумтор» (открыто в 1978 г., эксплуатируется с середины 1990-х гг.) расположено на юговостоке Кыргызстана на высоте около 4 км в горах Тянь-Шаня в зоне распространения вечномерзлых пород [5]. Климат – резко континентальный (температура зимой –35 °C, летом +20 °C), среднегодовая температура 6 °C [6].

Месторождение разрабатывается открытым способом, добыто порядка шести миллионов тонн руды при среднем содержании золота от 3 до 7 г/т. Извлечение золота ведется цианированием, жидкие отходы транспортируются по пульпопроводу с фабрики в хвостохранилище. По мере наполнения защитная дамба последнего наращивается в среднем на 1,5 м ежегодно. Высота дамбы достигает 34 м, общая протяженность L около трех километров [7]. Для предотвращения размыва откосов и проникновения фильтрата, создается защитный (противофильтрационный) экран (ПФЭ): поверхность дамбы и дно хвостохранилища покрываются непроницаемой пленкой толщиной около полутора миллиметров, края которой свариваются [8]. Сварные швы и являются наиболее «слабым местом» защитного покрытия. Геомеханическая модель, постановка прямой задачи и граничные условия. Возведение и эксплуатация гидротехнических сооружений (ГТС) различного назначения (гидроэлектростанции, дамбы, плотины, каналы) в зоне распространения многолетнемерзлых пород, нарушает естественный тепловой баланс, обусловливает растепление мерзлых пород и появление новых путей миграции флюидов [9, 10]. Это может вызвать не только разрушение ГТС, но и загрязнение окружающей среды отходами производства. Различные аспекты моделирования процессов деформирования и тепломассообмена применительно к природным и антропогенным объектам, расположенным в зоне вечной мерзлоты, рассматривались в [11–15].

Практический интерес представляет текущее состояние объекта, поэтому рассмотрим постановку задачи, не учитывающую изменение конфигурации защитной дамбы в процессе эксплуатации. На рисунке 1 показана схема вертикального сечения исследуемого объекта. Непрерывная технология производства обеспечивает сохранение температуры  $T_w$  флюидов в хвостохранилище круглый год от 4 до 8 °C. Мониторинг состояния рассматриваемого гидротехнического сооружения и массива подстилающих пород выполняется посредством измерения давления и температуры в наблюдательных скважинах на различной глубине.

Поскольку протяженность L дамбы много больше поперечных размеров, а конфигурации вертикальных сечений различаются незначительно [5], то рассмотрим 2D модель плоского деформированного состояния в декартовой системе координат (x, z). Нижняя граница z = Z расчетной области G (рисунок 2) расположена в зоне вечномерзлых пород с постоянной отрицательной температурой  $T_n$  [6]. В начальный момент времени t = 0 температура T дамбы и подстилающего грунтового массива равна  $T_n$ , затем хвостохранилище до отметки  $z_0$  заполняется флюидом с температурой  $T_w$ .

Процесс протаивания происходит значительно медленнее, чем теплообмен между флюидом и грунтом, поэтому эволюцию температуры *T* и давления *P* будем описывать параболическими уравнениями с учетом конвекции [16]:

$$T_{t} + V \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left( K_{c}(T) \nabla T \right), \tag{1}$$

$$P_t = \nabla \cdot \left( K_f(T) \nabla P \right), \tag{2}$$

где  $K_f$  и  $K_c$  – коэффициенты фильтрации и температуропроводности. Скорость фильтрации флюида  $\vec{V}$  подчиняется закону Дарси:

$$\dot{V} = -K_f(T)\nabla P / (\rho g), \qquad (3)$$

где r – плотность флюида; g – ускорение свободного падения.

Напряженно-деформированное состояние в области *G* описывается пороупругой моделью [17], представленной:

уравнениями равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho_r g \delta_{iz} = 0; \tag{4}$$

законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{ij} - P \tag{5}$$

и соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5 \left( u_{i,j} + u_{j,i} \right), \tag{6}$$

где s<sub>ij</sub> и е<sub>ij</sub> – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $u_i$  – смещения (i,j = x,z);  $d_{ij}$  – символ Кронекера; l, m и r<sub>r</sub> – параметры Ламе и плотность пород.



участок нарушения целостности противофильтрационного экрана
пункт измерения давления в наблюдательной скважине

 $T=T_{...}$ 

Рисунок 2 – Расчетная область G и граничные условия

Устойчивость дамбы будем оценивать по критерию Кулона-Мора [1]:

$$\tau_{\max} = \tau_* , \qquad (7)$$

где  $\tau_{\max} = \sqrt{0.25(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + \sigma_{xz}^2}$ ,  $\tau_* = (\sigma - P) \operatorname{tg} \psi + \tau_c$ ,  $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) / 2$  (у-угол внутреннего

трения;  $s_{ij}$  – сцепление). Положительное значение величины  $W = t_{max} - t_c$  свидетельствует об опасном состоянии среды.

Условия на  $\delta G$  представлены в таблице 1, где  $P_a$  – атмосферное давление,  $P_w = rgh(x)$  (h – глубина хвостохранилища, рисунок 2); s<sub>n</sub> и t<sub>n</sub> – нормальная и касательная составляющие вектора напряжений на площадке с внешней нормалью  $\vec{n} = (n_x, n_z)$ ;  $T_a(t$  – ежегодное распределение температуры воздуха по данным [18]. Противофильтрационный экран покрывает только часть дна хвостохранилища  $A_1A_2...A_7$ : на сегменте  $A_aA_1$  происходит дренирование.

Если в ПФЭ на некотором участке возникает разрыв (рисунок 2), то на нем задаются условия дренирования, аналогичные таковым для  $A_0A_1$ .

В таблице 2 приведены значения теплофизических, фильтрационных и деформационно-прочностных свойств пород, заимствованные из [19–22].

Вестник КРСУ. 2022. Том 22. № 8

Участок   <br< td=""><td colspan="3">Уравнение</td></br<>	Уравнение			
	(1)	(2)	(4)–(6)	
$A_{0}A_{1}$	$P=P_{w}$	$T=T_w$	$s_{zz} = -P_w s_{xz} = 0$	
$A_{1}A_{2}A_{7}(\Pi \Phi \Im)$	$V_n=0$	$T=T_w$	$s_n = -P_w n_x$ $t_n = -P_w n_z$	
$A_7 A_8 \dots A_{11}$	$P=P_a$	$T=T_a(t)$	$s_n = t_n = 0$	
$A_{11}A_{12}$	$V_x = 0$	$T_{x}=0$	$s_{xz} = 0  u_x = 0$	
$A_{12}A_{13}$	$V_z=0$	$T=T_n$	$s_{xz} = 0  u_z = 0$	
$A_{13}A_0$	V_=0	T = 0	$s_{v_{z}} = 0  u_{v} = 0$	

Таблица 1 – Краевые условия на границе расчетной области G

Палахиттички колич	Породы		
параметры модели	мерзлые ( <i>T</i> <0)	талые (Т>0)	
r, кг/м <sup>3</sup>	2100	2100	
т , МПа	23	11	
1, МПа	54	16	
у, град	35	25	
t <sub>.</sub> , МПа	0.5	0.1	
К, м/с	0	4.5×10 <sup>-6</sup>	
$K \cdot M^2/c$	2.5×10-6	1.7×10-6	

Таблица 2 – Физические свойства пород и флюидов

Система уравнений (1)–(6) с граничными условиями (таблица 1) реализована методом конечных элементов на основе оригинальных кодов [23, 24]. Расчеты проводились при температуре нейтрального слоя  $T_n = -2$  °C [20],  $P_a = 0.1$  МПа, глубине заполнения хвостохранилища h(0) = 34 м (период эксплуатации 10 лет) с шагом по времени 1 сутки. Размеры области расчета: длина X = 600 м, глубина Z = 400 м, плотность флюида в талой зоне r = 1050 кг/м<sup>3</sup>.

**Влияние нарушения целостности ПФЭ на состояние дамбы.** Мониторинг состояния защитной дамбы осуществляется с помощью наблюдательных скважин (рисунки 1, 2), где проводят термометрические и пьезометрические измерения. Данные о температуре необходимы для оценки глубины протаивания массива, в случае нарушения целостности ПФЭ они малоинформативны, поскольку в придонной зоне хвостохранилища температура практически неизменна.

Пусть в некоторый момент времени  $t = t_h$  из-за некачественной сварки шва [25] в ПФЭ образовался разрыв протяженностью l (рисунок 2) с центром в точке  $(x_h, z_h)$ . Проанализируем его влияние на состояние дамбы. Рассмотрим изолинии функции W, характеризующей устойчивость объекта, в момент времени t = 6 лет в случае цельного и нарушенного  $(t_h = 5$  лет,  $x_h = 230$  м,  $z_h = 16$  м, l = 2 м) противофильтрационного экрана (рисунок 3,а и 3,6 соответственно). Оказалось, что сравнительно небольшое отверстие вызывает значительное увеличение размеров зон возможных разрушений (W>0) тем более опасных, чем ближе участок разрыва к гребню дамбы. Это обусловлено возрастанием давления P в этих зонах, что способствует уменьшению предельного значения касательного напряжения  $t_*$  в критерии (7).

Определение места и времени появления разрыва в противофильтрационном экране по пьезометрическим данным. Как «реагируют» гидродинамические поля на возникновение разрыва в ПФЭ? Иными словами, есть ли индикатор нарушения экрана? На рисунке 4 показано изменение давления  $P_h(t) = P(t,x_s,z_s)$  в наблюдательных скважинах  $B_s$  (s = 1,2) при различном положении разрыва (координаты точек измерения  $x_s$  и  $z_s$  вынесены на врезки). Для сравнения черными линиями показано давление в тех же точках при функционировании ПФЭ в штатном режиме. Оказалось, что датчики давления



Рисунок 3 – Изолинии функции W: ненарушенный ПФЭ (а); ПФЭ с разрывом (б)



Рисунок 4 – Давление в наблюдательных скважинах  ${\bf B}_1$  и  ${\bf B}_2$  при различном положении разрыва

(точность 0.01 МПа) реагируют на повреждение ПФЭ в течение первых месяцев (в зависимости от расстояния  $B_s$  до разрыва). При этом угол b наклона кривой  $P_h(t)$  тем больше, чем ближе пункт измерения расположен к месту разрыва. Резкое изменение b может служить индикатором разрыва ПФЭ.

Сформулируем обратную коэффициентную задачу: определить время *t<sub>h</sub>* и координату *x<sub>h</sub>* места разрыва ПФЭ по данным пьезометрических измерений. Рассмотрим целевую функцию:

$$\Phi(t_h, x_h) = \sum_{s=1}^2 \alpha_s \sum_{i=1}^I \left[ 1 - P_s(t_i, x_s, z_s, t_h, x_h) / P_s^*(t_i, x_s, z_s) \right]^2,$$

где  $t_i$  – дискретные моменты времени регистрации давления  $P_s^*$  (входные данные) в наблюдательных скважинах;  $P_h(t_i, x_s, z_s, t_h, x_h)$  – «теоретическое» давление, рассчитанное по (1)–(6) при некоторых значениях  $t_h$  и  $x_h$ . Точка минимума ( $t_h^*, x_h^*$ ) целевой функции F доставляет решение обратной задачи. Для исследования разрешимости последней синтезируем входные данные:

$$P_{s}^{*}(t_{i}, x_{s}, z_{s}) = [1 + \gamma \omega(t_{i})]P_{s}(t_{i}, x_{s}, z_{s}, t_{h}^{0}, x_{h}^{0}),$$

где  $P_h$  – точное решение прямой задачи – давление в пункте с координатами ( $x_s, z_s$ ), если разрыв ПФЭ

произошел в точке  $x = x_h^0$  в момент времени  $t = t_h^0$ ; w – равномерно распределенная на [-1,1] случайная величина; g – уровень помехи. На рисунке 5 показаны изолинии F при g = 0.3,  $x_h^0 = 160$  м,  $t_h^0 = 5$  лет,  $a_1 = a_2 = 0.5$ . Можно видеть, что при выбранных значениях весовых коэффициентов  $\alpha_s$  целевая функция унимодальна, обратная задача имеет решение  $(t_h^*, x_h^*)$  (синий кружок на рисунке 5), которое находилось модифицированным методом сопряженных градиентов [26]. Необходимо отметить, что не для всех наборов коэффициентов  $a_s$  условие однозначной разрешимости обратной задачи выполнено, например, при  $a_1 = 0$  и  $a_2 = 1$  функция F не является унимодальной.

Численные эксперименты показали, что использование градиентных методов [27] для поиска минимума F целесообразно, если датчики в наблюдательных скважинах расположены на достаточном



Рисунок 5 – Изолинии целевой функции F

Вестник КРСУ. 2022. Том 22. № 8

удалении от границы мерзлых и талых пород, поскольку в окрестности нулевой изотермы коэффициенты температуропроводности  $K_f(T)$  и фильтрации  $K_c(T)$  изменяются скачком, поэтому целевая функция F недифференцируема.

Заключение. В рамках разработанной геомеханической модели, описывающей эволюцию температурных и гидродинамических полей в окрестности хвостохранилища высокогорного рудника «Кумтор», сформулирована и исследована на разрешимость обратная задача определения времени возникновения и места разрыва противофильтрационного экрана по данным режимных пьезометрических измерений. На основе численных экспериментов с использованием синтетических входных данных показано, что при надлежащем выборе весовых коэффициентов в целевой функции, обратная задача однозначно разрешима, если мониторинг давления осуществляется в нескольких наблюдательных скважинах, а уровень помехи не превышает 0.3–0.4.

Работа выполнена в рамках проекта НИР номер государственной регистрации 121062200075-4.

Поступила: 28.04.22; рецензирована: 13.05.22; принята: 18.05.22.

### Литература

- 1. Jaeger J.C. Fundamentals of Rock Mechanics. 4th Edition / J.C. Jaeger, N.G.W. Cook, R. Zimmerman. Wiley-Blackwell, 2007. 488 p.
- 2. Zang A. Stress Field of the Earth's Crust / A. Zang, O. Stephansson. Springer, 2010. 322 p.
- 3. *Hudson J.A.* Rock Testing and Site Characterization. Principles, Practice and Projects / J.A. Hudson. Pergamon, 1993. 932 p.
- 4. Sakurai S. Back Analysis in Rock Engineering / S. Sakurai. London: CRC Press, 2017. 240 p.
- 5. «Кумтор Голд Компани». URL: https://www.kumtor.kg (дата обращения: 12.03.2022).
- 6. Строительные нормы и правила 2.01.01-82. Строительная климатология и геофизика. М.: Минстрой России, 1996. 140 с.
- 7. *Осмонбетова Д.К.* Современное экологическое состояние в районе верхнего течения р. Нарын и прогнозные оценки в связи с разработкой золоторудного месторождения / Д.К. Осмонбетова // Вестник КРСУ. 2011. Т. 11. № 3. С. 50–53.
- 8. На руднике «Кумтор» подняли высоту дамбы хвостохранилища. URL: https://www.vb.kg/244692 (дата обращения: 23.03.2022).
- 9. *Zhang Y.* Disequilibrium response of permafrost thaw to climate warming in Canada over 1850 2100 / Y. Zhang, W. Chen, D.W. Riseborough // Geophys. Res. Lett. 2008. V. 35. L02502.
- 10. Долгих С.Н. Особенности проектирования и эксплуатации ГТС промышленных комплексов в зоне вечномерзлых грунтов / С.Н. Долгих // Гидротехника. 2021. № 2. С. 43–48.
- 11. Стетюха В.А. Особенности моделирования тепломассопереноса в условиях распространения высокотемпературных многолетнемерзлых пород / В.А. Стетюха // ГИАБ. 2009. № 3. С. 293 – 297.
- Riseborough D. Recent Advances in Permafrost Modelling / D. Riseborough, N. Shiklomanov, B. Etzelmuller, S. Gruber, S. Marchenko // Permafrost and Periglacial Processes. 2008. V. 19. Pp. 137–156.
- 13. Bense V. Transient hydrodynamics in inter-cratonic basins during glacial cycles / V. Bense, M. Person // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. F04005.
- 14. Buiskikh A.A. Prediction of thermal regime within a tailing dump under permafrost / A.A. Buiskikh, M.N. Zamoshch // Journal of Mining Science. 2010. V. 46. № 1. Pp. 28–33.
- McKenzie J.M. Groundwater flow with energy transport and water-ice phase change: Numerical simulations, benchmarks, and application to freezing in peat bogs / J.M. McKenzie, C.I. Voss, D.I. Siegel // Adv. Water Resour. 2007. V. 30. Pp. 966–983.
- 16. Bejan A. Convection Heat Transfer. 4th Edition / A. Bejan. Wiley, 2013. 696 p.
- 17. Coussy O. Poromechanics / O. Coussy. John Wiley & Son Ltd, 2004. 315 p.
- 18. Погода в России и мире. URL: https://www.gismeteo.ru (дата обращения: 11.06.2021).
- 19. Аксенов В.И. Коэффициенты для корректировки значений модулей деформации, полученных в результате компрессионных испытаний мерзлых грунтов / В.И. Аксенов // Электронное научное издание. Альманах Пространство и Время. Специальный выпуск «Система планета Земля». 2013. Т. 4. Вып. 1.
- 20. *Чжан Р.В.* Температурный режим и устойчивость низконапорных гидроузлов и грунтовых каналов в криолитозоне / Р.В. Чжан. Якутск: Изд-во Ин-та мерзлотоведения СО РАН, 2002. 207 с.

Вестник КРСУ. 2022. Том 22. № 8

- 21. Свод правил 39.13330.2012 Плотины из грунтовых материалов. Актуализированная редакция СНиП 2.06.05–84. Дата введения 2013-01-01.
- 22. Гончаров С.А. Термодинамика / С.А. Гончаров. М.: Изд-во МГГУ, 2002. 439 с.
- 23. *Назарова Л.А.* Напряженное состояние наклонно-слоистого массива горных пород вокруг выработки / Л.А. Назарова // ФТПРПИ. 1985. № 2. С. 33–37.
- 24. Nazarova L.A. Dilatancy and the formation and evolution of disintegration zones in the vicinity of heterogeneities in a rock mass / L.A. Nazarova, L.A. Nazarov // Journal of Mining Science. 2009. V. 45. № 5. Pp. 411–419.
- 25. Ищенко А.В. Обеспечение фильтрационной безопасности и эффективности противофильтрационных устройств гидротехнических сооружений / А.В. Ищенко. Ростов-на-Дону: СКНЦВШ, 2007. 256 с.
- 26. *Назаров Л.А.* Оценка напряжений и деформационных свойств породных массивов на основе решения обратной задачи по данным измерений смещений на свободных границах / Л.А. Назаров, Л.А. Назарова, А.Л. Карчевский, А.В. Панов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15. № 4. С. 102 109.
- 27. Avriel M. Nonlinear Programming: Analysis and methods / M. Avriel. Dover Publishing, 2003. 532 p.