УДК 517.956.6
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-12-3-11

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Абдумиталип уулу Кубатбек

Аннотация. Доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи для уравнения в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами, содержащего произведение смешанного параболо-гиперболического оператора и дифференциального оператора колебания струны в пятиугольнике на плоскости. Методом понижения порядка уравнений разрешимость краевой задачи сводится к решению задачи Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения с переменными коэффициентами. Разрешимость этой задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно следа функции на линии изменения типа уравнения. В гиперболической части области методом функции Римана получено представление решения задачи для гиперболического уравнения с младшими членами. В параболической части области методом последовательных приближений и функции Грина получено решение первой краевой задачи для параболического уравнения с младшим членом.

Ключевые слова: краевые задачи; параболо-гиперболический оператор; интегральные уравнения; функция Римана и Грина.

КЕНЖЕ МҮЧӨЛӨРҮ МЕНЕН ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕЛЕР

Абдумиталип уулу Кубатбек

Аннотация. Тегиздиктеги беш бурчтукта аралаш парабола-гиперболалык оператор менен кылдын термелүүсүн мүнөздөөчү дифференциалдык оператордун көбөйтүндүсүн камтыган, өзгөрүлмө коэффициенттери бар төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселенин чыгарылышы бар экендиги жана анын жалгыздыгы жөнүндө теорема далилденген. Теңдемелердин тартибин төмөндөтүү ыкмасы менен чектик маселенин чыгарылышы өзгөрүлмө коэффициенттери бар аралаш параболо-гиперболалык теңдеме үчүн Трикоми маселесин чыгарууга алып келет. Бул маселенин чыгарылышы теңдеменин түрүнүн өзгөрүү сызыгындагы функциянын изи боюнча экинчи түрдөгү Фредгольм интегралдык теңдемесин чыгарууга чейин төмөндөйт. Риман функциясынын ыкмасы менен аймактын гиперболалык бөлүгүндө кенже мүчөлөр менен гиперболалык теңдеме үчүн маселени чыгаруу идеясы алынган. Аймактын параболалык бөлүгүндө ырааттуу жакындаштыруу ыкмасы жана Грин функциясы кенже мүчө менен параболалык теңдеме үчүн биринчи чектик маселенин чечилишин алат.

Түйүндүү сөздөр: чектик маселе; парабола-гиперболалык оператор; интегралдык тендемелер; Риман жана Грин функциялары.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MIXED FOURTH-ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION WITH MINOR TERMS

Abdumitalip uulu Kubatbek

Abstract. A theorem on the existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem for a fourth-order partial differential equation with variable coefficients, containing the product of a mixed parabolic-hyperbolic operator and a differential operator of string oscillations in a bounded pentagon of a two-dimensional plane, is proved. By the method of lowering the order of equations, the solvability of the boundary value problem is reduced to solving the

Tricomi problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients. The solvability of this problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind with respect to the trace of the function on the line of change in the type of the equation. In the hyperbolic part of the domain, the Riemann function method is used to obtain a representation of the solution of the problem for a hyperbolic equation with lower terms. In the parabolic part of the domain, the Green's function method and successive approximations are used to solve the first boundary value problem for a parabolic equation with a minor term.

Keywords: boundary value problems; parabolic-hyperbolic operator; integral equations; Riemann and Green's function.

Введение. Постановка и исследование корректных краевых задач для уравнений 3-го и 4-го порядков является одним из важных направлений теории краевых задач для уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными [1–4].

В работе рассматривается уравнение 4-го порядка вида

$$L_1 L_2 u = 0 \tag{1}$$

$$L_1 \equiv \begin{cases} l_1 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y), \quad y > 0, \\ l_2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y), \quad y < 0, \end{cases} \qquad L_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $a_2(x,y),\ b_2(x,y),\ c_i(x,y)\ (i=1,2)$ – заданные функции.

Пусть $D_1 = D \cap (y>0),\ D_2 = D \cap (y<0)$. Класс C^{n+m} означает существование и непрерывность всех производных $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(r = 0,1,\dots,n; s = 0,1,\dots,m\right)$ [1].

Краевые задачи для уравнения $L_1 u = 0$ исследованы в работах [3, 4]. Для уравнения (1) с постоянными коэффициентами краевые задачи изучены в работе [5]. Когда оператор L_1 является эллиптико-гиперболическим оператором, краевая задача для уравнения $L_1 L_2 u = 0$ была изучена в [6, 7]. В работе [8] рассмотрена краевая задача для уравнения типа (1), когда L_1 – эллиптико-гиперболический, а L_2 – дифференциальный оператор второго порядка.

1. Постановка задачи. Область D, окруженную отрезками линии $AC: x+y=0$, $CB: x-y=\ell\,(\ell>0),\ BB_0: x=\ell,\ B_0A_0: y=h\,(h>0),\ A_0A: x=0$, рассмотрим с помощью уравнения (1).

Уравнение (1) в области D_1 может быть записано в виде:

$$l_1 L_2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = 0, \ (x,y) \in D_1, \tag{2}$$

которое имеет две различные характеристики: $x+y=const,\ \ x-y=const$ и двукратную характеристику $y=const$. В области D_2 уравнение (1) представим в виде:

$$l_2 L_2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c_2(x,y)\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0, \ (x,y) \in D_2, \tag{3}$$

где $x+y=const,\ \ x-y=const$ – двукратные действительные характеристики.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, имеющую следующие свойства:

1) $u(x, y)$ – решение уравнения (1) в области $D \setminus (y=0)$;
2) $u_x(x, y)$ и $u_y(x, y)$ непрерывны в области $\bar{D}$;
3) $\square u = u_{xx} - u_{yy}$ непрерывно в области $\bar{D}$;
4) $\dfrac{\partial \square u}{\partial x}, \dfrac{\partial \square u}{\partial y}$ – непрерывны в области D;
5) $u(x, y)$ – удовлетворяет следующим условиям:

$$u\,|_{AA_0} = \varphi_1(y), \;\; u\,|_{BB_0} = \varphi_2(y), \;\; 0 \le y \le h,, \tag{4}$$

$$u_{xx}\,|_{AA_0} = \varphi_3(y), \;\; u_{xx}\,|_{BB_0} = \varphi_4(y), \;\; 0 \le y \le h, \tag{5}$$

$$u\,|_{AC} = \psi_1(x), \;\; 0 \le x \le \frac{\ell}{2}, \; u\,|_{BC} = \psi_2(x), \;\; \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \;\; \frac{\ell}{2} \le x \le \ell, \tag{7}$$

где n – внутренняя нормаль; $\varphi_i(y)$ $(i = \overline{1,4}, \;\; \psi_j(x)$ $(j = \overline{1,3})$ – заданные функции, причем:

$$\begin{gathered} c_1(x, y) \in C(\bar{D}_1), \; a_2(x, y), \; a_{2x}(x, y), \; b_2(x, y), \; b_{2y}(x, y), \; c_2(x, y) \in C(\bar{D}_2), \\ \varphi_i(y) \in C^2\left[0, h\right] \; (i = 1, 2), \;\; \varphi_j(y) \in C\left[0, h\right] \;\; (j = 3, 4), \\ \psi_1(x) \in C^2\left[0, \frac{\ell}{2}\right], \;\; \psi_2(x) \in C^2\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right], \;\; \psi_3(x) \in C^3\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \varphi_1(0) = \psi_1(0), \;\; \varphi_2(0) = \psi_2(\ell), \;\; \psi_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{\ell}{2}\right), \\ \varphi_4(0) - \varphi_2''(0) = -\sqrt{2}\psi_3'\left(\ell\right). \end{gathered} \tag{9}$$

В случае, когда $y > 0$, уравнение (1) представляется в виде системы:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \upsilon_1(x, y), \; (x, y) \in D_1, \tag{10}$$

$$l_1 \upsilon_1 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} + c_1(x, y)\upsilon_1 = 0, \; (x, y) \in D_1; \tag{11}$$

а при $y < 0$ – в виде системы:

$$L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \upsilon_2(x, y), \; (x, y) \in D_2, \tag{12}$$

$$l_2 \upsilon_2 \equiv \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \upsilon_2}{\partial y^2} + a_2(x, y)\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial \upsilon_2}{\partial y} + c_2(x, y)\upsilon_2 = 0, \; (x, y) \in D_2. \tag{13}$$

Представляем новые неизвестные функции следующим образом:

$$\upsilon_1(x,+0) = \upsilon_2(x,-0) = \mu(x), \quad 0 \le x \le \ell, \tag{14}$$

$$\upsilon_{1y}(x,+0) = \upsilon_{2y}(x,-0) = \theta(x), \; 0 \le x \le \ell. \tag{15}$$

Тогда функции $\upsilon_1(x,y)$ и $\upsilon_2(x,y)$ удовлетворяют условиям (3) и (4) задачи 1.

2. Связь между $\mu(x)$ и $\theta(x)$, полученная из области D_2. Решение задачи (13), (14) и (15) имеет следующий вид [9]:

$$\begin{aligned}\vartheta_2(x,y) &= \frac{1}{2}\left[R\left(x,y;x+y,0\right)\mu(x+y) + R\left(x,y;x-y,0\right)\mu(x-y)\right] + \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\left[R_\eta\left(x,y;\xi,0\right) + b_2(\xi,0)R\left(x,y;\xi,0\right)\right]\mu(\xi)\,d\xi - \\ &-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}R\left(x,y;\xi,0\right)\theta(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{16}$$

где $R\left(x,y;\xi,\eta\right)$ – функция Римана является решением следующей вспомогательной задачи:

$$R_{\xi\xi} - R_{\eta\eta} - \left(a_2R\right)_\xi - \left(b_2R\right)_\eta + c_2R = 0, \left(\xi,\eta\right) \in D_2^*, \tag{17}$$

$$R\left(x,y;\xi,\eta\right)\Big|_{\eta=x+y-\xi} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_\xi^x\left[a_2\left(t,x+y-t\right) + b_2\left(t,x+y-t\right)\right]dt\right\}, \quad x+y \le \xi \le x, \tag{18}$$

$$R\left(x,y;\xi,\eta\right)\Big|_{\eta=\xi-x+y} = \exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_x^\xi\left[a_2\left(t,t-x+y\right) - b_2\left(t,t-x+y\right)\right]dt\right\}, \quad x \le \xi \le x-y, \tag{19}$$

$$R\left(x,y;x,y\right) = 1, \tag{20}$$

где $D_2^* = \left\{\left(\xi,\eta\right): y < \eta < 0, \;\; x+y-\eta < \xi < x-y+\eta\right\}$.

Условие (7) запишется в виде:

$$\upsilon_2(x,x-\ell) = -\sqrt{2}\,\psi_3'(x), \; \frac{\ell}{2} \le x \le \ell. \tag{21}$$

Из (21) при $x = \ell$ имеем, что $\upsilon_2(\ell,0) = -\sqrt{2}\,\psi_3'(\ell) = \mu(\ell)$. Используя условие (21) в (16), получаем:

$$\begin{aligned}&R\left(x,x-\ell;2x-\ell,0\right)\mu(2x-\ell) - R\left(x,x-\ell;\ell,0\right)\sqrt{2}\,\psi_3'(\ell) - \int\limits_\ell^{2x-\ell}\left[R_\eta\left(x,x-\ell;\xi,0\right) + \right. \\ &\left. + b_2(\xi,0)R\left(x,x-\ell;\xi,0\right)\right]\mu(\xi)d\xi + \int\limits_\ell^{2x-\ell}R\left(x,x-\ell;\xi,0\right)\theta(\xi)d\xi = -2\sqrt{2}\psi_3'(x), \; \frac{\ell}{2} \le x \le \ell.\end{aligned} \tag{22}$$

Пусть $2x - \ell = z.$ Тогда $x = \dfrac{z+\ell}{2}$. Так как $\dfrac{\ell}{2} \le x \le \ell$, то

$$0 \le 2x - \ell \le \ell,\ x - \ell = \frac{z-\ell}{2},\ 0 \le z \le \ell,\ -\frac{\ell}{2} \le \frac{z-\ell}{2} \le 0.$$

Итак, уравнение (22) можно записать в виде:

$$R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};z,0\right)\mu(z) = \int\limits_{\ell}^{z}\left[R_{\eta}\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)+\right.$$
$$\left.+b_2(\xi,0)R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\mu(\xi)d\xi - \int\limits_{\ell}^{z}R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\xi,0\right)\theta(\xi)d\xi -$$
$$-2\sqrt{2}\psi_3'(x) + \sqrt{2}R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\ell,0\right)\psi_3'(\ell),\ \ 0 \le z \le \ell.$$

Итак, если мы заменим z на x, то получим:

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right)\mu(x) = \int\limits_{\ell}^{x}\left[R_{\eta}\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)+\right.$$
$$\left.+b_2(\xi,0)R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\right]\mu(\xi)d\xi - \int\limits_{\ell}^{x}R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};\xi,0\right)\theta(\xi)d\xi - \tag{23}$$
$$-2\sqrt{2}\psi_3'(x) + \sqrt{2}R\left(\frac{z+\ell}{2},\frac{z-\ell}{2};\ell,0\right)\psi_3'(\ell),\ \ 0 \le x \le \ell.$$

Теорема 1. $\forall x \in [0,\ell]$:

$$R\left(\frac{x+\ell}{2},\frac{x-\ell}{2};x,0\right) > 0\,. \tag{24}$$

Доказательство. Условие (18) запишем так:

$$R\left(x,y;\xi,x+y-\xi\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{x}\left[a_2\left(t,x+y-t\right)+b_2\left(t,x+y-t\right)\right]\right\}dt,\ \ x+y \le \xi \le x. \tag{25}$$

Полагая $\xi = x+y$, из (25) имеем:

$$R\left(x,y;x+y,0\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x}\left[a_2\left(t,x+y-t\right)+b_2\left(t,x+y-t\right)\right]\right\}dt. \tag{26}$$

Для удобства рассуждений запишем уравнение прямой CB : $x - y = \ell$ в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \dfrac{s+\ell}{2},\ 0 \le s \le \ell, \\ y = \dfrac{s-\ell}{2},\ 0 \le s \le \ell. \end{cases}$$

Заметим, что $x+y=s$. Тогда из (26) имеем:

$$R\left(\frac{s+\ell}{2},\frac{s-\ell}{2};s,0\right)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{\frac{s+\ell}{2}}\left[a_2\left(t,s-t\right)-b_2\left(t,s+t\right)\right]dt\right\},\ 0\le s\le\ell.$$

Таким образом, замена s на x подтверждает неравенство (24).

С учетом неравенства (24) запишем уравнение (23) в виде:

$$\mu(x)=\int\limits_{x}^{\ell}N_1\left(x,\xi\right)\mu(\xi)d\xi+\int\limits_{x}^{\ell}N_2\left(x,\xi\right)\theta(\xi)d\xi+\Phi_1(x), \tag{27}$$

где $N_1\left(x,\xi\right)$, $N_2\left(x,\xi\right)$, $\Phi_1(x)$ – заданные функции.

Запишем решение (27) в виде:

$$\mu(x)=\Phi_2(x)+\int\limits_{x}^{\ell}T\left(x,\xi\right)\theta(\xi)d\xi, \tag{28}$$

где $R_2\left(x,\xi\right)$ – резольвента ядра, а

$$T\left(x,\xi\right)=N_2\left(x,\xi\right)+\int\limits_{\xi}^{x}R_2\left(x,t\right)N_2\left(t,\xi\right)dt,\ \Phi(x)=\Phi_1(x)+\int\limits_{x}^{\ell}R_2\left(x,\xi\right)\Phi_1(\xi)d\xi.$$

3. Соотношение между $\mu(x)$ и $\theta(x)$, полученное из области D_1. Из постановки задачи 1 в области D_1 для $\upsilon_1\left(x,y\right)$ получим следующую задачу:

$$l_1\upsilon_1\equiv\upsilon_{1xx}-\upsilon_{1y}+c_1\left(x,y\right)\upsilon_1=0,\left(x,y\right)\in D_1, \tag{29}$$

$$\upsilon_1\big|_{x=0}=\overline{\varphi}_1(y),\ \ \upsilon_1\big|_{x=\ell}=\overline{\varphi}_2(y),\ \ 0\le y\le h,\ \ \upsilon_1\left(x,0\right)=\mu(x),\ \ 0\le x\le\ell, \tag{30}$$

где $\overline{\varphi}_1(y)=\varphi_3(y)-\varphi_1''(y),\ \overline{\varphi}_2(y)=\varphi_4(y)-\varphi_2''(y)$.

Теорема 2. Пусть $c_1\left(x,y\right)\in C(\overline{D})$ и справедливо неравенство:

$$\forall\left(x,y\right)\in\overline{D_1}:c_1\left(x,y\right)\le 0. \tag{31}$$

Тогда задачи (29), (30) имеют решение.

Переходя к пределу при $y\to+0$, из уравнения (29) получим соотношение между функциями $\mu(x)$ и $\theta(x)$:

$$\mu''(x)+c_1\left(x,0\right)\mu(x)=\theta(x),\ \ 0\le x\le\ell. \tag{32}$$

Из условий согласования получаем следующие условия:

$$\mu(0)=\overline{\varphi}_1\left(0\right),\ \ \mu(\ell)=\overline{\varphi}_2(0). \tag{33}$$

Полагая

$$\mu(x)=\overline{\varphi}_1\left(0\right)+\frac{x}{\ell}\left[\overline{\varphi}_2(0)-\overline{\varphi}_1\left(0\right)\right]+z(x), \tag{34}$$

где $z(x)$ – новая неизвестная функция, задачу (32), (33) сведем к следующей задаче:

$$z''(x)+c_1(x,0)z(x)=g\left(x\right), \tag{35}$$

$$z(0) = 0, \quad z(\ell) = 0, \tag{36}$$

где $g_1(x) = \theta(x) - c_1(x,0)\left\{\overline{\varphi}_1(0) + \frac{x}{\ell}\left[\overline{\varphi}_2(0) - \overline{\varphi}_1(0)\right]\right\}.$

Теорема 3. Пусть $c_1(x,0) \in C[0,\ell]$ и имеет место неравенство:

$$\forall x \in [0,\ell]:\ c_1(x,0) \le 0. \tag{37}$$

Тогда задача (35), (36) имеет единственное решение [4].

Представим решение задачи (35), (36) в виде

$$z(x) = \int_0^\ell G_1(x,\xi)\, g_1(\xi)\, d\xi, \tag{38}$$

где $G_1(x,\xi)$ – функция Грина.

Тогда из (34) имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\mu(x) = g_2(x) + \int_0^\ell G_1(x,\xi)\,\theta(\xi)\, d\xi, \tag{39}$$

где

$$g_2(x) = \overline{\varphi}_1(0) + \frac{x}{\ell}\left[\overline{\varphi}_2(0) - \overline{\varphi}_1(0)\right] - \int_0^\ell c_1(\xi,0)\, G_1(x,\xi)\left\{\overline{\varphi}_1(0) + \frac{\xi}{\ell}\left[\overline{\varphi}_2(0) - \overline{\varphi}_1(0)\right]\right\} d\xi.$$

4. Сведение задачи 1 к интегральному уравнению. Исключая $\mu(x)$ из (27) и (39), получаем интегральное уравнение:

$$\Phi_2(x) + \int_x^\ell T(x,\xi)\,\theta(\xi) d\xi = g_2(x) + \int_0^\ell G_1(x,\xi)\,\theta(\xi)\, d\xi.$$

Продифференцируем это уравнение и, учитывая при этом равенство $T(x,x) = N_2(x,x) = 1$, имеем:

$$\theta(x) = \int_x^\ell T_x(x,\xi)\,\theta(\xi) d\xi - g_2'(x) + \Phi_2'(x) - \int_0^\ell G_{1x}(x,\xi)\,\theta(\xi)\, d\xi.$$

Обращая Вольтерровскую часть этого уравнения, получим:

$$\theta(x) = \int_0^\ell N(x,t)\,\theta(t) dt + g(x), \tag{40}$$

где $N(x,t) = G_{1x}(x,t) + \int_0^x R_3(x,\xi)\, G_{1x}(\xi,t)\, d\xi,$

$$g(x) = g_2'(x) - \Phi_2'(x) + \int_0^x R_3(x,\xi)\left[g_2'(\xi) - \Phi_2'(\xi)\right] d\xi,$$

$R_3(x,\xi)$ – резольвента ядра $T_x(x,\xi)$.

Пусть $\|N\| = \max\limits_{\substack{0\le x\le \ell \\ 0\le t\le \ell}} |N(x,t)|$.

Теорема 4. Если условие

$$\ell \cdot \|N\| \le 1 \tag{41}$$

соблюдено, то уравнение (40) однозначно разрешимо и это решение представимо в виде:

$$\theta(x) = g(x) + \int_0^\ell R_4(x,\xi)\, g(\xi) d\xi,$$

где $R_4(x,\xi)$ – резольвента ядра $N(x,t)$.

5. Решение задачи (29), (30) в области D_1. Уравнение (29) запишем в виде:

$$\upsilon_{1xx} - \upsilon_{1y} = -c_1(x,y)\upsilon_1. \tag{42}$$

Тогда, используя функцию Грина, уравнение (42) представим в виде:

$$\upsilon_1(x,y) = f(x,y) + \int_0^y d\eta \int_0^\ell K(x,y;\xi,\eta)\upsilon_1(\xi,\eta)\, d\xi, \tag{43}$$

где $K(x,y;\xi,\eta) = c_1(\xi,\eta)G(x,y;\xi,\eta)$,

$$f(x,y) = \int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\overline{\varphi}_1(\eta)\, d\eta - \int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\overline{\varphi}_2(\eta)\, d\eta + \int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\,\mu(\xi)\, d\xi,$$

$G(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина.

Для ядра уравнения (43) имеет место оценка:

$$\forall (x,y) \in \overline{D}_1 \ \wedge\ \forall(\xi,\eta) \in \overline{D}_1 : \left|K(x,y;\xi,\eta)\right| \le \frac{C}{(y-\eta)^{1/2}},$$

где C – положительная константа. Следовательно, уравнение (43) является интегральным уравнением типа Фредгольма со слабой особенностью, и имеет единственное решение.

6. Решение задачи в области 1. Решение задачи 1 в области D_2 определяется как решение задачи Гурса для уравнения (11), а в области D_1 – как решение первой краевой задачи для уравнения (10).

Теорема 5. Если выполняются условия (8), (9), (31) и (41), то решение задачи 1 существует и единственно.

Выводы. В работе методом понижения порядка уравнения разрешимость задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В гиперболической части области для получения решения используется метод функций Римана, а в параболической части области – метод функции Грина и метод последовательных приближений.

Поступила: 15.08.22; рецензирована: 27.08.22; принята: 01.09.22.

Литература

1. *Жегалов В.И.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Известия вузов. Математика. 1999. № 10. С. 73–76.
2. *Джураев Т.Д.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.

3. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.
4. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
5. *Абдумиталип уулу Кубатбек*. Краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором колебания струны / Кубатбек Абдумиталип уулу // Вестник ОшГУ. Математика, физика, техника. 2021. № 2. С. 11–20.
6. *Бобылева Л.А.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка / Л.А. Бобылева, М.М. Смирнов // Известия вузов. Математика. 1972. № 5. С. 15–21.
7. *Смирнов М.М.* Краевая задача со смещением для уравнения смешанно-составного типа 4-го порядка / М.М. Смирнов // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 9. С. 1678–1686.
8. *Жегалов В.И.* Некоторые задачи для уравнения смешанно-составного типа в бесконечной области / В.И. Жегалов // Труды семинара по краевым задачам. 1972. Вып. 9. С. 75–85.
9. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. 736 с.