УДК 519.718.2

ОЦЕНИВАНИЕ ВРЕМЕНИ РЕГУЛИРОВАНИЯ РОБАСТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Ж.Е. Жуматаева

Предлагается подход к построению и оцениванию времени регулирования робастно устойчивой системы управления угловым движением искусственного спутника Земли, закон управления которой задается в форме функций катастроф “гиперболическая омбилика”. Исследование устойчивости выполняется на основе алгебраического критерия Гурвица. Оценивание времени регулирования производится для соответствующих стационарных состояний.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли (ИСЗ); функция катастроф; гиперболическая омбилика; устойчивость; робастность; время регулирования.

ESTIMATION OF CONTROL SYSTEM FOR A ROBUST ANGULAR MOTION CONTROL SYSTEM OF EARTH ARTIFICIAL SATELLITE

Zh.E. Zhumatayeva

In this article, an approach to the construction and evaluation time of robust stability control angular motion control system of an artificial Earth satellite is proposed, which enforces the control law in the form of disaster functions «hyperbolic umbilic». Stability analysis is performed on the bases of the algebraic Hurwitz criterion. Evaluation of regulation time is produced for the corresponding stationary states.

Keywords: artificial Earth satellite (AES); disaster functions; hyperbolic umbilic; stability; robustness; regulation.

В настоящее время структура большинства технологических процессов и технических объектов такова, что точное математическое описание элементов, входящих в их состав, получить весьма затруднительно, а в некоторых случаях и невозможно. Если же принять во внимание нестабильность параметров объектов и наличие неконтролируемых возмущений, то можно с уверенностью утверждать, что большинство реальных объектов управления относятся к классу априорно неопределенных и нелинейных. При этом основными методами синтеза подобных систем являются методы адаптивного и робастного управления [1].

Одной из методологий построения робастных систем является применение закона управления в форме структурно-устойчивых отображений типа функций катастроф. Традиционно в литературе рассматриваются семь элементарных катастроф [2]. Обоснование выбора структурно-устойчивого отображения в форме функций катастроф “гиперболическая омбилика”, а также его применение в качестве закона управления рассматривалось ранее для построения робастно устойчивых систем управления движением летательного аппарата [3].

Показателем быстродействия системы может служить время ее регулирования. Однако его также можно использовать и для оценки “классического времени” регулирования, то есть минимального времени, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения не будет превышать некоторой заданной величины [4].

В данной статье описывается построение робастной системы управления угловым движением искусственного спутника Земли с законом управления в форме трехпараметрических структурно-устойчивых отображений в форме функций катастроф “гиперболическая омбилика” с дальнейшим оцениванием времени регулирования данной системы методом функций Ляпунова.

Рассмотрим упрощенную модель углового движения ИСЗ относительно продольной оси [5].

Обозначим через $\gamma(t)$, (t), $\omega_x(t)$ – угол и угловую скорость крена ИСЗ; J_x – момент инерции ИСЗ относительно продольной оси x; $M_x(t)$ – управляющий момент относительно этой оси, развиваемый, например, реактивными двигателями. Запишем уравнение динамики вращательного движения и кинематическое соотношение, связывающее угол и угловую скорость. Получим:

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega_x(t)$$
$$\frac{d\omega_x(t)}{dt} = \frac{M_x(t)}{J_x}. \qquad (1)$$

Положим:

$$x_1 = \gamma(t),\ x_2 = \omega_x(t),\ u = M_x(t).$$

Уравнения углового движения ИСЗ примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{J}u \end{cases}. \qquad (2)$$

Зададим закон управления в форме функций катастроф "гиперболическая омбилика":

$$u = -x_1^3 - x_2^3 - k_1x_1x_2 + k_2x_2 + k_3x_1. \qquad (3)$$

В таком случае система (2) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{J}\left(-x_1^3 - x_2^3 - k_1x_1x_2 + k_2x_2 + k_3x_1\right) \end{cases} \qquad (4)$$

Определим установившиеся состояния системы (4):

$$\begin{cases} x_{2S} = 0 \\ -x_{1S}^3 - x_{2S}^3 - k_1x_{1S}x_{2S} + k_2x_{2S} + k_3x_{1S} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Система (4) имеет следующие состояния равновесия:

$$x_{1S}^1 = 0,\ x_{2S}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$x_{1S}^{2,3} = \pm\sqrt{k_3},\ x_{2S}^{2,3} = 0. \qquad (7)$$

Исследование устойчивости установившихся состояний проведем, используя линейную аппроксимацию. Разложим нелинейные члены системы уравнений (4) вокруг стационарных состояний (6)–(7) и, ограничиваясь членами первого приближения [6], получим:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{J}\left[\left(-3x_{1S}^2 - k_1x_{1S}x_{2S} + k_3\right)x_1 + \left(-3x_{2S}^2 - k_1x_{1S}x_{2S} + k_2\right)x_2\right] \end{cases} \qquad (8)$$

Выполним исследование устойчивости стационарного состояния (6). В этом случае система (8) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{J}\left(k_3x_1 + k_2x_2\right) \end{cases} \qquad (9)$$

Система уравнений (9) в векторно-матричной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = Gx,$$

где $x = (x_1, x_2)$ – вектор переменных состояния системы и $G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k_3}{J} & \dfrac{k_2}{J} \end{Vmatrix}$ – матрица линеаризованной замкнутой системы вокруг стационарного состояния $x_{1S}^1 = 0, x_{2S}^1 = 0$.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет вид:

$$\left|\lambda I - G\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -\dfrac{k_3}{J} & \lambda - \dfrac{k_2}{J} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{k_2}{J}\lambda - \frac{k_3}{J}. \qquad (10)$$

Корни характеристического уравнения (10) имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{k_2}{2J} \pm \sqrt{\frac{k_2^2}{4J^2} + \frac{k_3}{J}}. \qquad (11)$$

При положительном J стационарное состояние (6) будет устойчиво при $k_2 < 0$, $k_3 < 0$.

При $k_3 < 0$ происходит бифуркация и появляются два новых стационарных состояния $x_{1S}^{2,3} = \pm\sqrt{k_3}, x_{2S}^{2,3} = 0$, исследуем их устойчивость.

В случае состояния равновесия $x_{1S}^2 = \sqrt{k_3}, x_{2S}^2 = 0$ система (8) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{J}\left(-2k_3x_1 + \left(-k_1\sqrt{k_3} + k_2\right)x_2\right) \end{cases} \qquad (12)$$

Матрица линеаризованной замкнутой системы вокруг установившегося состояния $x_{1S}^2 = \sqrt{k_3}, x_{2S}^2 = 0$ будет иметь вид:

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{2k_3}{J} & \dfrac{-k_1\sqrt{k_3} + k_2}{J} \end{Vmatrix}$$

Характеристическое уравнение соответственно имеет вид:

$$\left|\lambda I - G\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \dfrac{2k_3}{J} & \lambda + \dfrac{k_1\sqrt{k_3} - k_2}{J} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k_1\sqrt{k_3} - k_2}{J}\lambda + \frac{2k_3}{J}. \qquad (13)$$

Корни характеристического уравнения (13) имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}=\frac{k_1\sqrt{k_3}-k_2}{2J}\pm\sqrt{\frac{\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4J^2}+\frac{2k_3}{J}}. \qquad (14)$$

Стационарное состояние $x_{1S}^2=\sqrt{k_3}, x_{2S}^2=0$ при $J<0$ будет устойчиво при выполнении следующих условий: $k_1\sqrt{k_3}-k_2>0$.

Аналогично выполнив исследование устойчивости стационарного состояния $x_{1S}^3=-\sqrt{k_3}, x_{2S}^3=0$, определяем, что оно будет устойчиво при выполнении условия $J>0, k_1\sqrt{k_3}+k_2>0$.

Таким образом, линеаризованная система управления угловым движением искусственного спутника Земли будет устойчивой при любых значениях параметров k_1, k_2, k_3 причем при значении параметра $k_3=0$ происходит бифуркация.

Определим верхнюю оценку времени регулирования для определенных состояний равновесия.

Согласно теореме [4], время регулирования определяется следующим образом: $\overline{t_p}=\lambda_M\ln\frac{V_0}{\lambda_m\Delta^2}$.

Запишем систему (9) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{k_3}{J} & \frac{k_2}{J}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Тогда уравнение вида $A^TB+BA=-I$ для системы (15) примет вид:

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{k_3}{J}\\ 1 & \frac{k_2}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{k_3}{J} & \frac{k_2}{J}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (16)$$

После перемножения матриц, получим:

$$\begin{bmatrix}\frac{k_3}{J}b_{21} & \frac{k_3}{J}b_{22}\\ b_{11}+\frac{k_2}{J}b_{21} & b_{12}+\frac{k_2}{J}b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{k_3}{J}b_{12} & b_{11}+\frac{k_2}{J}b_{12}\\ \frac{k3}{J}b_{22} & b_{21}+\frac{k_2}{J}b_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (17)$$

Учитывая равенство $b_{12}=b_{21}$, получаем решение:

$$b_{12}=b_{21}=-\frac{J}{2k_3},\ b_{22}=\frac{J\left(J-k_3\right)}{2k_2k_3},\ b_{11}=\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\left|B-I\lambda\right|=\begin{bmatrix}\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3} & -\frac{J}{2k_3}\\ -\frac{J}{2k_3} & \frac{J\left(J-k_3\right)}{2k_2k_3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3}-\lambda & -\frac{J}{2k_3}\\ -\frac{J}{2k_3} & \frac{J\left(J-k_3\right)}{2k_2k_3}-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=\left(\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3}-\lambda\right)\left(\frac{J\left(J-k_3\right)}{2k_2k_3}-\lambda\right)-\left(\frac{J}{2k_3}\right)^2=$$

$$=\lambda^2-\left[\frac{J\left(J-k_3\right)+\left(k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2\right)}{2k_2k_3}\right]\lambda+$$

$$+\frac{J\left[\left(J-k_3\right)\left(k_2^2\right)+\left(k_3-J\right)k_2\right]}{\left(2k_2k_3\right)^2}-\frac{J^2}{4k_3^2}=0. \qquad (18)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_1=\frac{J\left(J-k_3\right)+\left(k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2\right)}{2k_2k_3},$$

$$B_1=\frac{J\left[\left(J-k_3\right)\left(k_2^2\right)+\left(k_3-J\right)k_2\right]}{\left(2k_2k_3\right)^2}-\frac{J^2}{4k_3^2}.$$

Тогда уравнение (18) можно записать в виде

$$\lambda^2-A_1\lambda+B_1=0. \qquad (19)$$

Корни уравнения (19) имеют вид

$$\lambda_1=\lambda_m=\frac{A_1-\sqrt{A_1^2-4B_1}}{2},\ \lambda_2=\lambda_M=\frac{A_1+\sqrt{A_1^2-4B_1}}{2}.$$

Положим $x(0)=(1\quad 0)^T$ и $\Delta=0{,}05$.

Тогда получим:

$$V_0=x^{0^T}Bx^0=\left(1\quad 0\right)\begin{bmatrix}\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3} & -\frac{J}{2k_3}\\ -\frac{J}{2k_3} & \frac{J\left(J-k_3\right)}{2k_2k_3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3},$$

$$\overline{t_p}=\lambda_M\ln\frac{V_0}{\lambda_m}=\frac{A_1+\sqrt{A_1^2-4B_1}}{2}\ln\left[\frac{k_2^2+\left(k_3-J\right)k_2}{2k_2k_3\left(A_1-\sqrt{A_1^2-4B_1}\right)}\right]. \qquad (20)$$

Таким образом, время регулирования системы при устойчивом состоянии (6) будет определяться значениями k_2, k_3, и J.

Аналогичным образом определим время регулирования для стационарного состояния (7).

Запишем систему (12) в виде

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{2k_3}{J} & \frac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Уравнение вида

$A^TB+BA=-I$ для системы (21) примет вид:

$$\begin{bmatrix}0 & -\frac{2k_3}{J}\\ 1 & \frac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2k_3}{J} & \dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Перемножив матрицы, получим:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{2k_3}{J}b_{21} & -\dfrac{2k_3}{J}b_{22}\\ b_{11}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{21} & b_{12}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{22}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix} -\dfrac{2k_3}{J}b_{12} & b_{11}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{12}\\ -\dfrac{2k3}{J}b_{22} & b_{21}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{22}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\dfrac{2k_3}{J}\left(b_{21}+b_{12}\right)=-1\\ -\dfrac{2k_3}{J}b_{22}+b_{11}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{12}=0\\ b_{11}+\dfrac{-k_1\sqrt{k_3}+k_2}{J}b_{21}-\dfrac{2k_3}{J}b_{22}\\ b_{12}+b_{21}+\dfrac{2\left(-k_1\sqrt{k_3}+k_2\right)}{J}b_{22}=0 \end{cases} \qquad (23)$$

Учитывая равенство $b_{12} = b_{21}$, получаем следующее решение системы:

$$b_{11}=\frac{2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)},\quad b_{12}=b_{21}=\frac{J}{4k_3},$$

$$b_{22}=\frac{\left(2k_3+J\right)J}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)}.$$

Характеристическое уравнение:

$$B-I\lambda\left|=\right|\begin{matrix}\dfrac{2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)}-\lambda & \dfrac{J}{4k_3}\\ \dfrac{J}{4k_3} & \dfrac{\left(2k_3+J\right)J}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)}-\lambda\end{matrix}\right|=$$

$$=\left(\frac{2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)}-\lambda\right)\left(\frac{\left(2k_3+J\right)J}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)}-\lambda\right)-$$

$$-\left(\frac{J}{4k_3}\right)^2=\lambda^2-\left[\frac{4k_3^2+J^2+4k_3J+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{\left(4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)\right)}\right]\lambda+$$

$$+\frac{\left(2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2\right)\left(2k_3+J\right)J}{\left(4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)\right)^2}-\left(\frac{J}{4k_3}\right)^2. \qquad (24)$$

Введем следующие обозначения:

$$A_2=\frac{4k_3^2+J^2+4k_3J+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{\left(4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)\right)},$$

$$B_2=\frac{\left(2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2\right)\left(2k_3+J\right)J}{\left(4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)\right)^2}-\left(\frac{J}{4k_3}\right)^2.$$

Тогда уравнение (24) запишется в виде

$$\lambda^2 - A_2\lambda + B_2 = 0. \qquad (25)$$

Корни квадратного уравнения (25) будут равны:

$$\lambda_1=\lambda_m=\frac{A_2-\sqrt{A_2^2-4B_2}}{2},\quad \lambda_2=\lambda_M=\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4B_2}}{2}.$$

Положим $x(0) = (1 \quad 0)^T$ и Δ= 0,05.

Тогда получим:

$$V_0 = x^{0^T}Bx^0 =$$

$$(1\ \ 0)\begin{bmatrix}\dfrac{2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)} & \dfrac{J}{4k_3}\\ \dfrac{J}{4k_3} & \dfrac{{}_3+J)J}{{}_1\sqrt{k_3}-k_2)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2}{4k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)},$$

$$\overline{t_p}=\lambda_M\ln\frac{V_0}{\lambda_m}=$$

$$=\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4B_2}}{2}\ln\left[\frac{\left(2k_3\left(2k_3+J\right)+\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)^2\right)}{2k_3\left(k_1\sqrt{k_3}-k_2\right)\left(A_2-\sqrt{A_2^2-4B_2}\right)}\right]. \qquad (26)$$

Таким образом, время регулирования системы при устойчивом состоянии (6) будет определяться значениями k_2, k_3 и J.

Можно утверждать, что линеаризованная модель системы управления угловым движением искусственного спутника Земли при введении в контур управления закона управления в форме функций катастроф "гиперболическая омбилика" становится робастно устойчивой при любых значениях параметров регулятора k_1, k_2 и k_3. При этом время регулирования системы определяется значениями параметров регулятора.

Литература

1. *Егупов Н.Д.* Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник: в 3 т. Т. 3: Методы современной теории автоматического управления / под ред. Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 748 с.
2. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф: в 2 т. / Р. Гилмор. М.: Мир, 1984. Т. 1. 350 с.
3. *Жуматаева Ж.Е.* Исследование робастной устойчивости системы управления летательным аппаратом [Электронный ресурс] / Ж.Е. Жуматаева // Электрон. журн. “Труды МАИ”. 2012. № 53. Режим доступа: http: // www.mai.ru/science/trudy/. Загл. с экрана.
4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д.П. Ким. М.: Физматлит, 2007. 440 с.
5. *Андриевский Б.Р.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MatLab^R / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. СПб.: Наука, 2000. 475 с.
6. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического регулирования и управления / А.А. Воронов и др.: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1977. 312 с.