

УДК 517.951:624.04  
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-12-11-21

## МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИЙ ГРАНИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ

*А.И. Дадабоев*

*Аннотация.* Рассмотрены три метода аппроксимаций граничных параметров при численном решении диафрагмы жёсткости зданий и сооружений. Одним из наиболее эффективных методов численного решения граничных интегральных уравнений является метод граничных элементов, согласно которому граница области разбивается на конечное число элементов и интегрирование производится в пределах каждого элемента, где рассмотрена односвязная область. При аппроксимации граничных параметров элементами первого порядка будем считать границу области кусочно-гладкой и состоящей из прямолинейных отрезков, в пределах которых компоненты векторов перемещений и напряжений изменяются линейно. Для аналитической формулировки В-сплайнов при сплайновой аппроксимации граничных параметров используются усеченные степенные функции, а также аппарат разделенных разностей.

*Ключевые слова:* аналитическое решение; граничные интегральное уравнение; численность; разбивка; сплайн-аппроксимация; интеграл; компоненты; матрица; напряжения; функция.

---

## САНДЫК МАСЕЛЕЛЕРДЕ ЧЕКТИК ПАРАМЕТРЛЕРДИ ЖАКЫНДАТУУ ЫКМАЛАРЫ

*А.И. Дадабоев*

*Аннотация.* Имараттар менен курулмалардын катуулук диафрагмасынын сандык меселесинде чектик параметрлерин жакындаштыруунун үч ыкмасы каралат. Чектик интегралдык теңдемелерди сандык чыгаруунун эң натыйжалуу ыкмаларынын бири чектик элементтер ыкмасы болуп саналат, ага ылайык облустун чеги чектүү сандагы элементтерге бөлүнөт жана бир байланыштагы облус каралган ар бир элементтин чегинде интеграция жүргүзүлөт. Чектик параметрлерди биринчи даражадагы элементтер боюнча жакындатууда, аймактын чеги бөлүкчөлүү жылмакай жана түз сегменттерден турат деп карайбыз, анын ичинде жылышуу жана чыңалуу векторлорунун компоненттери сызыктуу түрдө өзгөрөт. Чектик параметрлерди сплайналык жакындаштырууда в-сплайнерлерди аналитикалык туюнтуу үчүн кыскартылган кубаттуулук функциялары, ошондой эле бөлүнгөн айырмалардын аппараты колдонулат.

*Түйүндүү сөздөр:* аналитикалык чыгарылышы; чектик интегралдык теңдеме; саны; бөлүү; сплайн жакындоо; интеграл; компоненттер; матрица; чыңалуу; функция.

---

## METHODS FOR APPROXIMATING BOUNDARY PARAMETERS FOR NUMERICAL SOLUTIONS

*A.I. Dadaboev*

*Abstract.* The article discusses three methods for approximating boundary parameters in the numerical solution of the stiffness diaphragm of buildings and structures. One of the most effective methods for the numerical solution of boundary integral equations is the boundary element method, according to which the boundary of the region is divided into a finite number of elements and integration is carried out within each element where a simply connected region is considered. When approximating the boundary parameters by first-order elements, we will consider the boundary of the region to be piecewise smooth and consisting of straight segments, within which the components of the displacement and stress vectors change linearly. With spline approximation of boundary parameters, truncated power functions, as well as the apparatus of divided differences, are used for the analytical formulation of B-splines.

*Keywords:* analytical solution; boundary integral equation; breakdown; spline approximation; integral; components; matrix; spline; stress; function.

**Аппроксимация граничных параметров элементами нулевого порядка.** Очевидно, что для большинства задач теории упругости аналитическое решение граничных интегральных уравнений является невозможным, поэтому возникает необходимость применения численных методов. Одним из наиболее эффективных методов численного решения граничных интегральных уравнений является метод граничных элементов, согласно которому граница области разбивается на конечное число элементов и интегрирование производится в пределах каждого элемента (Бенерджи, Баттерфилд, 1984; Бреббия, Уокер, 1982; Бреббия, Теллес, Вроубел, 1987; Громатка, Лей, 1990; Крауч, Старфилд, 1987; Круз, 1978; Ишлинский, Черный, 1978; Угодчиков, Хуторянский, 1986). Другим методом решения граничных интегральных уравнений является метод сплайн-аппроксимации граничных параметров, который приводит к более гибкому алгоритму для учета особенностей по сравнению с методом граничных элементов [1–3].

Рассмотрим односвязную область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ . Разбиваем границу рассматриваемой области на  $n$  элементов нулевого порядка, где искомая функция будет иметь кусочно-постоянный характер изменения. Для анализа берем один из интегралов, например, первый интеграл в правой части интегрального уравнения и предположим, что на некотором отрезке границы  $\Gamma_p$  неизвестными являются компоненты напряжений на наклонной поверхности  $p_x$  и  $p_y$  [2–4]:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (u_{xx}^* p_x + u_{yx}^* p_y) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} (u_{xy}^* p_x + u_{yy}^* p_y) d\Gamma \end{array} \right\}. \quad (1)$$

Далее предположим, что на том отрезке границы  $\Gamma_p$  области  $\Omega$ , где неизвестными являются  $p_x$  и  $p_y$ , нумерация элементов имеет вид  $1, 2, \dots, n_p$  (рисунок 1). Тогда каждый из интегралов в формуле записываются так:

$$\int_{\Gamma_p} u_{xx}^* p_x d\Gamma = \sum_{j=1}^m e_{ij} p_{xj}, \quad \int_{\Gamma_p} u_{yx}^* p_y d\Gamma = \sum_{j=1}^m f_{ij} p_{yj}, \quad (2)$$

$$\int_{\Gamma_p} u_{xy}^* p_x d\Gamma = \sum_{j=1}^m g_{ij} p_{xj}, \quad \int_{\Gamma_p} u_{yy}^* p_y d\Gamma = \sum_{j=1}^m h_{ij} p_{yj}, \quad (3)$$

$$e_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{xx}^* d\Gamma_j, \quad f_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{yx}^* d\Gamma_j, \quad (4)$$

$$g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{xy}^* d\Gamma_j, \quad h_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_{yy}^* d\Gamma_j, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n,$$

где  $u_{xx}^*, \dots, u_{yy}^*$  – компоненты тензора фундаментальных перемещений;  $\Gamma_j$  – длина  $j$ -го элемента. Интегралы вычисляются методами численного интегрирования (методы Гаусса, Симпсона и др.) [5–7].

Таким образом, если контур тела состоит из двух частей:  $\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_u$  где на одной части искомыми функциями являются  $p_x$  и  $p_y$ , а на другой части заданы поверхностные напряжения  $p_x^0$  и  $p_y^0$ , то это выражение можно изложенный представить в следующем виде [8–10]:

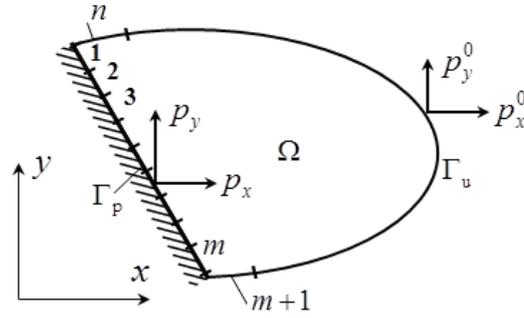


Рисунок 1 – К вычислению интегралов

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma \approx \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ G_1 & H_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_2 & F_2 \\ G_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x^0 \\ P_y^0 \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где  $E_1, \dots, H_1$  – прямоугольные матрицы размера  $n \times m$ ;  $P_x, P_y$  – вектор-столбцы из  $m$ -элементов;  $E_2, \dots, H_2$  – прямоугольные матрицы размера  $n \times n_u$ , где  $n_u = n - m$ ;  $P_x^0, P_y^0$  – векторы.

Второй интеграл в правой части, как интеграл в смысле главного значения для гладкой границы, представляется в виде [2, 10, 11]:

$$\mathbf{C} \mathbf{U}_p + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} + \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} (p_{xx}^* u_x + p_{yx}^* u_y) d\Gamma \\ \int_{\Gamma} (p_{xy}^* u_x + p_{yy}^* u_y) d\Gamma \end{array} \right\}. \quad (7)$$

$$\text{Здесь } \int_{\Gamma_u} p_{xx}^* u_x d\Gamma = \sum_{j=m+1}^n a_{ij} u_{xj}, \quad \int_{\Gamma_u} p_{yx}^* u_y d\Gamma = \sum_{j=m+1}^n b_{ij} p_{xj}, \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_u} p_{xy}^* u_x d\Gamma = \sum_{j=m+1}^n c_{ij} u_{xj}, \quad \int_{\Gamma_u} p_{yy}^* u_y d\Gamma = \sum_{j=m+1}^n d_{ij} u_{yj}, \quad (9)$$

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_{xx}^* d\Gamma_j, \quad b_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_{yx}^* d\Gamma_j, \quad (10)$$

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_{xy}^* d\Gamma_j, \quad d_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_{yy}^* d\Gamma_j, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n.$$

Следовательно, выражение приобретает вид:

$$\mathbf{C} \mathbf{U}_p + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma \approx \begin{bmatrix} A_1^* & B_1 \\ C_1 & D_1^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2^* & B_2 \\ C_2 & D_2^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x^0 \\ U_y^0 \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где  $A_1^*, B_1, C_1, D_1^*$  – прямоугольные матрицы размера  $n \times n_u$ , где  $n_u = n - m$ ;  $U_x, U_y$  – вектор-столбцы искоемых перемещений из  $n_u$  –элементов;  $A_2^*, B_2, C_2, D_2^*$  – прямоугольные матрицы размера  $n \times m$ ;  $U_x^0, U_y^0$  – векторы перемещений с  $m$  – элементами, заданных на контуре  $\Gamma_p$ . В отмеченных звездочкой матрицах коэффициенты равны [12, 13]:

$$a_{ij}^* = a_{ij} + 0,5\delta_{ij}, \quad d_{ij}^* = d_{ij} + 0,5\delta_{ij}, \quad (13)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

**Аппроксимация граничных параметров элементами первого порядка.** Здесь предполагается, что в пределах граничных элементов искомые функции  $\mathbf{P}_k$  и  $\mathbf{U}_k$  на границе области изменяются по линейному закону. Будем считать границу области кусочно-гладкой и состоящей из прямолинейных отрезков, в пределах которых компоненты векторов перемещений и напряжений изменяются линейно [5]. Например, компоненты перемещений в пределах  $j$ -го элемента могут быть представлены в виде, показанном на рисунке 2.

$$u_j = N_1 u_{1j} + N_2 u_{2j}, \quad (14)$$

$$N_1 = (S_j - s) / S_j, \quad N_2 = s / S_j,$$

где  $N_1, N_2$  – базисные функции;  $u_{1j}, u_{2j}$  – значения искомой функции в узловых точках;  $S_j$  – длина  $j$ -го элемента.

Воспользовавшись уравнением (10) интегралы в выражении (2) можно записать в следующем виде [7, 14]:

$$\int_{\Gamma_p} u_{xx}^* p_x d\Gamma = \sum_{j=1}^m \int_{S_j} u_{xx}^*(r_{ij}) p_{xj} ds = \int_{S_1} u_{xx}^*(r_{i1}) (N_1 p_{x11} + N_2 p_{x21}) ds_1 +$$

$$+ \int_{S_2} u_{xx}^*(r_{i2}) (N_1 p_{x12} + N_2 p_{x22}) ds_2 +$$

$$+ \dots + \int_{S_m} u_{xx}^*(r_{im}) (N_1 p_{x1,m} + N_2 p_{x2,m}) ds_m, \quad (15)$$

откуда при непрерывном изменении  $p_x(s)$  (рисунок 2),

где  $p_{x21} = p_{x12} = p_{x2}$ ,  $p_{x22} = p_{x13} = p_{x3}$ ,

$$p_{x2,m-1} = p_{x1,m} = p_{x,m},$$

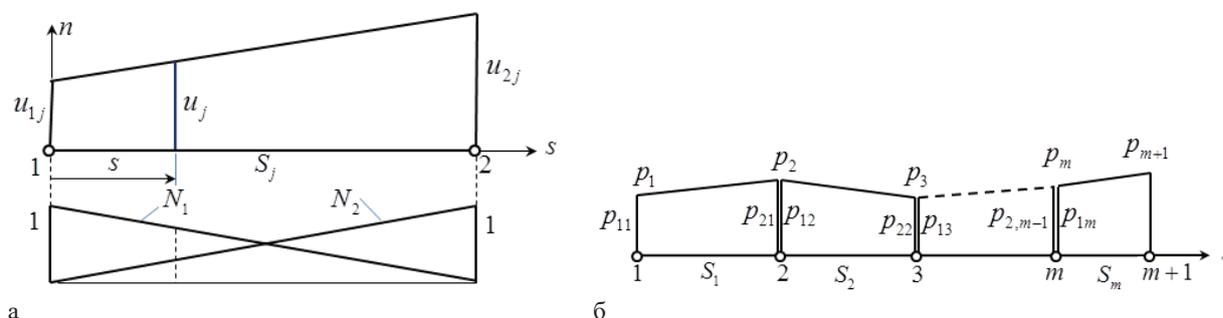


Рисунок 2 – Линейная аппроксимация граничных параметров

получаем:

$$\int_{\Gamma_p} u_{xx}^* p_x d\Gamma = p_{x1} \int_{S_1} u_{xx}^*(r_{i1}) N_1 ds_1 + \left( \int_{S_1} u_{xx}^*(r_{i1}) N_2 ds_1 + \int_{S_2} u_{xx}^*(r_{i2}) N_1 ds_2 \right) p_{x2} + \dots + \left( \int_{S_{m-1}} u_{xx}^*(r_{i,m-1}) N_2 ds_{m-1} + \int_{S_m} u_{xx}^*(r_{i,m}) N_1 ds_m \right) p_{x,m} + p_{x,m+1} \int_{S_m} u_{xx}^*(r_{im}) N_2 ds_m, \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n.$$

Следовательно, при линейной аппроксимации граничных параметров, коэффициенты записываются в следующем виде [7, 15, 16]:

$$e_{ij} = \int_{S_{j-1}} u_{xx}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} u_{xx}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (17)$$

$$f_{ij} = \int_{S_{j-1}} u_{yx}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} u_{yx}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (18)$$

$$g_{ij} = \int_{S_{j-1}} u_{xy}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} u_{xy}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (19)$$

$$h_{ij} = \int_{S_{j-1}} u_{yy}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} u_{yy}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n, \quad j = 2, \dots, m.$$

При  $j = 1$  и  $j = m + 1$  коэффициенты согласно приведенной выше формулы, представляются так:

$$e_{i,1} = \int_{S_1} u_{xx}^*(r_{i1}) N_1 ds_1, \quad e_{i,m+1} = \int_{S_m} u_{xx}^*(r_{i,m}) N_2 ds_m, \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n,$$

где заменой компонентов тензора Кельвина–Сомильяна (Лурье, 1970, с.175) получим остальные коэффициенты. В этом случае размеры прямоугольных матриц  $E_1, F_1, G_1, H_1$  будут равны  $n \times (m + 1)$ , а размеры матриц  $E_2, F_2, G_2, H_2$  –  $n \times n_u$ , где  $n_u = n - (m + 1)$  (рисунок 3).

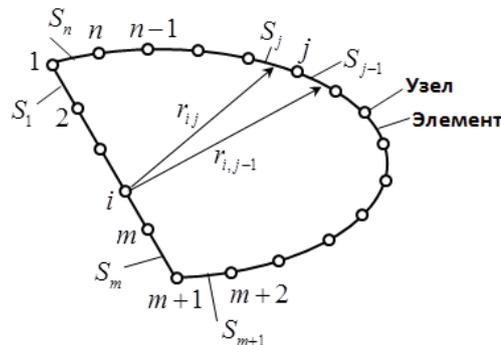


Рисунок 3 – Линейные граничные элементы

Аналогично определяются коэффициенты при линейной аппроксимации компонентов вектора перемещений [17, 18]:

$$a_{ij} = \int_{S_{j-1}} p_{xx}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} p_{xx}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (22)$$

$$b_{ij} = \int_{S_{j-1}} p_{yx}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} p_{yx}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (23)$$

$$c_{ij} = \int_{S_{j-1}} p_{xy}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} p_{xy}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (24)$$

$$d_{ij} = \int_{S_{j-1}} p_{yy}^*(r_{i,j-1}) N_2 ds_{j-1} + \int_{S_j} p_{yy}^*(r_{ij}) N_1 ds_j, \quad (25)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \dots, n, \quad j = m + 2, \dots, n.$$

В связи с тем, что в узлах  $m + 1$  и  $n + 1$ , которые совпадают с узлом 1, компоненты вектора перемещений равняются нулю, то нет необходимости в определении коэффициентов (16) при  $j = m + 1$  и  $j = n + 1$ . При этом размеры прямоугольных матриц  $A_1^*, B_1, C_1, D_1^*$  в (8) равняются  $n \times n_u$ , где  $n_u = n - (m + 1)$ .

**Сплайновая аппроксимация граничных параметров.** Представление функций через В-сплайны было исследовано в работах (Schoenberg, 1962; De Boor, 1972; Стечкин, 1976; Завьялов, 1980; Корнейчук, 1984. Для аналитической формулировки В-сплайнов используются усеченные степенные функции, а также аппарат разделенных разностей (Гельфонд, 1967). Сплайн-функцию  $S(\xi)$  можно представить в следующем виде [2, 3, 7]:

$$S(\xi) = \sum_{j=-m}^{n-1} b_j B_{m,j}(\xi). \quad (26)$$

Существует сплайн  $B_{m,j}(\xi)$  порядка  $m$ , по разбиению  $\xi_j < \xi_{j+1} < \dots < \xi_{m+i+1}$ , однозначно определяемый равенствами (Корнейчук, 1984, с. 44):

$$B_{m,j}(\xi) = \begin{cases} > 0, & \xi \in (\xi_j, \xi_{j+m+1}), \\ \equiv 0, & \xi \notin (\xi_j, \xi_{j+m+1}), \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{m,j}(\xi) d\xi = \int_{\xi_j}^{\xi_{j+m+1}} B_{m,j}(\xi) d\xi = 1.$$

Здесь будем рассматривать применение кубического В-сплайна. Базисный кубический В-сплайн с конечным носителем  $[\xi_j, \xi_{j+4}]$  представляется в следующей удобной для практического пользования форме [10, 19, 20]:

$$B_j(\xi) = 4 \sum_{i=j-2}^{j+2} \frac{(\xi - \xi_i)_+^3}{\omega'_i(\xi_i)}. \quad (27)$$

Здесь  $(\xi - \xi_i)_+$  – усеченная функция, равная  $\xi - \xi_i$  при  $\xi \geq \xi_i$  и нуль  $\xi < \xi_i$ ,  $\omega_j(\xi)$  – произведение из  $m + 2$  множителей, где  $m = 3$  – порядок сплайна,  $\omega'_i(\xi_i)$  – производная от функции  $\omega_j(\xi)$  при  $\xi = \xi_i$  ( $i = j - 2, \dots, j + 2$ ), состоящая из 4-х множителей:

$$\omega_j(\xi) = (\xi - \xi_{j-2})(\xi - \xi_{j-1})(\xi - \xi_j)(\xi - \xi_{j+1})(\xi - \xi_{j+2}), \quad (28)$$

$$\omega'_j(\xi_j) = (\xi_j - \xi_{j-2})(\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_j - \xi_{j+1})(\xi_j - \xi_{j+2}), \quad (29)$$

$$\omega'_j(\xi_{j-1}) = (\xi_{j-1} - \xi_{j-2})(\xi_{j-1} - \xi_j)(\xi_{j-1} - \xi_{j+1})(\xi_{j-1} - \xi_{j+2}), \quad (30)$$

$$\omega'_j(\xi_{j-2}) = (\xi_{j-2} - \xi_{j-1})(\xi_{j-2} - \xi_j)(\xi_{j-2} - \xi_{j+1})(\xi_{j-2} - \xi_{j+2}), \quad (31)$$

$$\omega'_j(\xi_{j+1}) = (\xi_{j+1} - \xi_{j-2})(\xi_{j+1} - \xi_{j-1})(\xi_{j+1} - \xi_j)(\xi_{j+1} - \xi_{j+2}), \quad (32)$$

$$\omega'_j(\xi_{j+2}) = (\xi_{j+2} - \xi_{j-2})(\xi_{j+2} - \xi_{j-1})(\xi_{j+2} - \xi_j)(\xi_{j+2} - \xi_{j+1}). \quad (33)$$

При разбижке носителя В-сплайна на равные шаги  $h$ , где, например,  $\xi_j - \xi_{j-2} = 2h$ ,  $\xi_j - \xi_{j+1} = -h$ , формулу с учетом этого можно представить в следующем виде (Митчелл, 1981, с. 15):

$$\tilde{B}_j(\xi) = \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{\xi - \xi_{j-2}}{h} \right)_+^3 - 4 \left( \frac{\xi - \xi_{j-1}}{h} \right)_+^3 + 6 \left( \frac{\xi - \xi_j}{h} \right)_+^3 - 4 \left( \frac{\xi - \xi_{j+1}}{h} \right)_+^3 + \left( \frac{\xi - \xi_{j+2}}{h} \right)_+^3 \right\},$$

$$\xi_{j-2} \leq \xi \leq \xi_{j+2}, \quad (34)$$

$$\tilde{B}_j(\xi) = \frac{3h}{2} B_j(\xi).$$

При различных значениях  $\xi$ , соответствующих узловым точкам, из (20) получим (знак тильду опускаем):

$$B_j(\xi_j) = 1, \quad B_j(\xi_{j-1}) = 1/4, \quad B_j(\xi_{j-2}) = 0,$$

$$B_j(\xi_{j+1}) = 1/4, \quad B_j(\xi_{j+2}) = 0,$$

что является ординатами  $B_j$ -сплайна в фиксированных узлах (рисунок 4). Базисный кубический В-сплайн с конечным носителем  $[\xi_{j-2}, \xi_{j+2}]$ , двигаясь по границе рассматриваемой области, позволяет аппроксимировать искомые функции в граничных интегральных уравнениях [7, 9, 17].

Базисный В-сплайн первого порядка с носителем  $[\xi_{j-1}, \xi_{j+1}]$  представляется в виде:

$$B_j(\xi) = 2h \sum_{i=j-1}^{j+2} \frac{(\xi - \xi_i)_+}{\omega'_j(\xi_i)}, \quad (35)$$

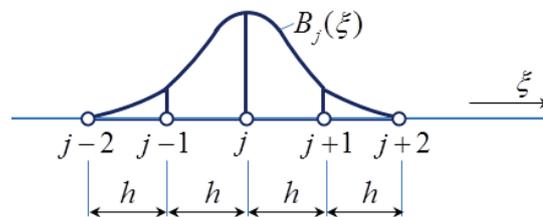


Рисунок 4 – Базисный  $B_j$  – сплайн

откуда с учетом вышеизложенного, получим:

$$B_j(\xi) = 2 \left\{ \frac{(\xi - \xi_{j-1})_+}{2h} - \frac{(\xi - \xi_j)_+}{h} + \frac{(\xi - \xi_{j+1})_+}{2h} \right\}, \quad (36)$$

$$B_j(\xi_{j-1}) = 0, \quad B_j(\xi_j) = 1, \quad B_j(\xi_{j+1}) = 0.$$

$$\text{Функция } B_j(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [\xi_j, \xi_{j+1}), \\ 0, & \xi \notin [\xi_j, \xi_{j+1}), \end{cases} \quad (36,a)$$

является В-сплайном нулевого порядка с носителем  $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ .

Границу области будем считать кусочно-гладкой и состоящей из прямолинейных и криволинейных отрезков, каждый из которых отличается от других или видом описывающего его уравнения или заданным на нем граничным условием. Поскольку  $B$  – сплайн является функцией одной переменной, а криволинейный интеграл по длине контура берется от некоторой функции двух переменных, требуется параметрическое представление границы [3, 14, 21]:

$$\int_S f(x, y) ds = \int_a^b f[x(\alpha), y(\alpha)] J(\alpha) d\alpha, \quad (37)$$

где  $J(\alpha)$  – якобиан параметрического представления. В частности, если  $S$  является прямолинейным отрезком  $J(\alpha) = 1$ ,  $ds = d\alpha$  (рисунок 5), а если является частью окружности с радиусом  $r$ , то  $J(\alpha) = r$ ,  $ds = r d\alpha$ .

Интегралы в граничных уравнениях при параметрическом представлении преобразуются так:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(r_{pk}) \mathbf{P}_k d\Gamma = \int_L \mathbf{U}^*(r_{\xi_i, \xi}) \mathbf{P}_{\xi} J(\xi) d\xi, \quad (38)$$

где  $\xi_i, \xi$  – фиксированная и переменная точки на границе;  $L$  – параметрическое представление границы  $\Gamma$ ,  $r(\xi_i, \xi)$  – расстояние между точками  $\xi_i$  и  $\xi$ . Следовательно, в связи с параметрическим представлением, наносим на границу  $\Gamma$  узлы сплайна, а искомые перемещения и напряжения представим в виде:

$$\mathbf{U}(\xi) = \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{U}}_j B_j(\xi), \quad \mathbf{P}(\xi) = \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{P}}_j B_j(\xi), \quad (38,a)$$

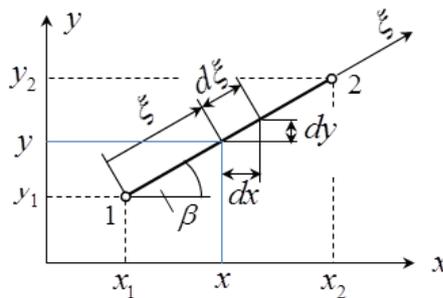


Рисунок 5 – Параметрическое представление прямолинейной границы

где  $\tilde{\mathbf{U}}_j, \tilde{\mathbf{P}}_j$  – векторы искомым перемещений и напряжений, соответствующие узлам сплайна,  $n$  – общее число узлов сплайна. Внося (24) в граничные интегралы, получаем:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{U}_k d\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \end{Bmatrix}, \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_k d\Gamma = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}, \quad (39)$$

где элементы матриц представляются в виде:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{\xi_{j-2}}^{\xi_{j+2}} p_{xx}^* B_j(\xi) J(\xi) d\xi, \\ h_{ij} &= \int_{\xi_{j-2}}^{\xi_{j+2}} u_{yy}^* B_j(\xi) J(\xi) d\xi, \\ i, j &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты определяются численным интегрированием в пределах носителя базисного В-сплайна с учетом фундаментальных решений. С целью практического применения и численного интегрирования по упомянутой формуле вычисляются ординаты базисных В-сплайнов  $B_j(\xi)$  в пределах одного носителя, которые будут использованы для остальных носителей. Чтобы применить квадратурную формулу Гаусса к интегралу вида [22]:

$$\int_{\xi_{j-2}}^{\xi_{j+2}} B_j(\xi) f(\xi) d\xi, \quad (40, a)$$

следует преобразовать его с помощью подстановки

$$\xi = \frac{\xi_{j+2} + \xi_{j-2}}{2} + \frac{\xi_{j+2} - \xi_{j-2}}{2} t, \quad (41)$$

переводящей отрезок  $\xi_{j-2} \leq \xi \leq \xi_{j+2}$  в отрезок  $-1 \leq t \leq 1$ . Применяя к преобразованному интегралу квадратурную формулу Гаусса (Демидович, 1970, с. 601), получаем:

$$\int_{\xi_{j-2}}^{\xi_{j+2}} B_j(\xi) f(\xi) d\xi = \frac{\xi_{j+2} - \xi_{j-2}}{2} \sum_{i=1}^n A_i B_j f(\xi_i) = 2h \sum_{i=1}^n A_i B_j f(\xi_i), \quad (42)$$

где  $\xi_i = \frac{\xi_{j+2} + \xi_{j-2}}{2} + \frac{\xi_{j+2} - \xi_{j-2}}{2} t_i = 2h(1 + t_i); \quad (43)$

$t_i, A_i$  – абсциссы точек и весовые коэффициенты;  $n$  – число принятых ординат на отрезке интегрирования;  $B_j$  – ординаты кубического В-сплайна, соответствующие абсциссам  $t_i$ , полученные из формулы. При реализации базисного В-сплайна первого порядка, где

$$\xi = \frac{\xi_{j+1} + \xi_{j-1}}{2} + \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2} t, \quad (44)$$

интеграл определяется следующим образом:

$$\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_{j+1}} B_j(\xi) f(\xi) d\xi = \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2} \sum_{i=1}^n A_i B_j f(\xi_i) = \xi_i = \frac{\xi_{j+1} + \xi_{j-1}}{2} + \frac{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}}{2} t_i = h(1 + t_i). \quad (45)$$

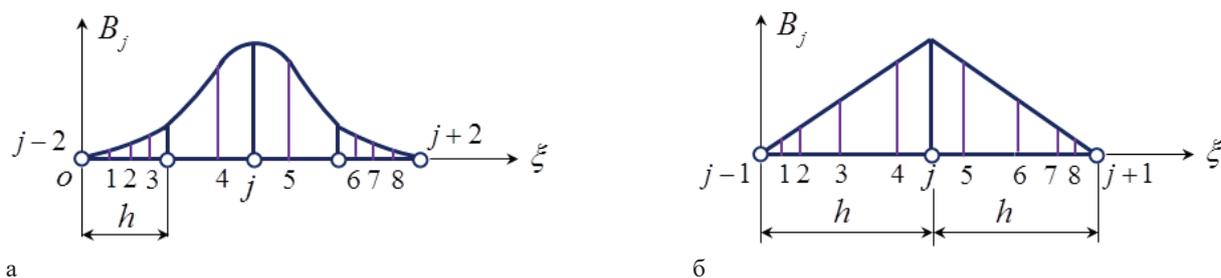


Рисунок 6 – B-сплайны с 8 узлами Гаусса: а – кубический; б – первого порядка

Таблица 1 – Элементы формулы Гаусса и базисные B-сплайны

| № п/п | $t_i$   | $A_i$  | $B_3$       |          | $B_1$       |        | $B_0$  |      |
|-------|---------|--------|-------------|----------|-------------|--------|--------|------|
|       |         |        | $\xi_i / h$ | $B_j$    | $\xi_i / h$ | $B_j$  |        |      |
| 1     | -0,9603 | 0,1012 | 0,0794      | 0,000125 | 0,0397      | 0,0397 | 0,0198 | 1,00 |
| 2     | -0,7967 | 0,2224 | 0,4066      | 0,0168   | 0,2033      | 0,2033 | 0,1017 | 1,00 |
| 3     | -0,5255 | 0,3137 | 0,9490      | 0,2136   | 0,4745      | 0,4745 | 0,2373 | 1,00 |
| 4     | -0,1834 | 0,3627 | 1,6332      | 0,8352   | 0,8166      | 0,8166 | 0,4083 | 1,00 |
| 5     | 0,1834  | 0,3627 | 2,3668      | 0,8352   | 1,1834      | 0,8166 | 0,5917 | 1,00 |
| 6     | 0,5255  | 0,3137 | 3,0510      | 0,2136   | 1,5255      | 0,4745 | 0,7627 | 1,00 |
| 7     | 0,7967  | 0,2224 | 3,5934      | 0,0168   | 1,7967      | 0,2033 | 0,8984 | 1,00 |
| 8     | 0,9603  | 0,1012 | 3,9206      | 0,000125 | 1,9603      | 0,0397 | 0,9802 | 1,00 |

На рисунке 6 показаны графики базисных B-сплайнов 3-го и 1-го порядков с соответствующими носителями  $[\xi_{j-2}, \xi_{j+2}]$  и  $[\xi_{j-1}, \xi_{j+1}]$  для случая равномерной сетки с шагом  $h$ .

В таблице 1 приведены  $t_i$  и  $A_i$  при  $n = 8$  (Демидович, 1970, с. 602), а также ординаты базисных B-сплайнов третьего, первого и нулевого порядков, соответствующие абсциссам  $\xi_i$  в локальной системе координат. Эти данные могут быть использованы для решения практических задач [14, 21].

Таким образом, постепенно двигая  $B_1(\xi)$ -сплайн вдоль границы рассматриваемой области, численным интегрированием методом Гаусса вычисляются интегралы и определяются численные значения.

Поступила: 10.11.2023; рецензирована: 24.11.2023; принята: 28.11.2023.

#### Литература

1. Низомов Д.Н. Решение граничных уравнений при сплайн-аппроксимации граничных параметров / Д.Н. Низомов // Тр. науч. практ. конф. ТТУ. Душанбе: ТТУ, 1994. С. 16.
2. Низомов Д.Н. Методы граничных уравнений и сплайн-аппроксимаций в задачах плит, лежащих на упругом основании / Д.Н. Низомов // Тр. межд. научно-теорет. конф.: «Современные проблемы аппроксимации и ее приложения». Куляб: КГУ, 1995. С. 42–43.
3. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении статических и динамических задач строительной механики / Д.Н. Низомов. М.: Изд-во АСВ, 2000. 282 с.
4. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. М.: Мир, 1984. 494 с.
5. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. М.: Мир, 1987. 524 с.

6. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. М.: Наука, 1970. 664 с.
7. Низомов Д.Н. Решение граничных уравнений при сплайн-аппроксимации граничных параметров / Д.Н. Низомов // Тр. науч. практ. конф. ТГУ. Душанбе: ТГУ, 1994. С. 16.
8. Габбасов Р.Ф. О численно-интегральном методе решения краевых задач строительной механики для дифференциальных уравнений в частных производных / Р.Ф. Габбасов // Сб. Исследования по теории сооружений. Вып. 22. М.: Стройиздат, 1976. С. 27–34.
9. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. М.: Наука, 1980. 350 с.
10. Низомов Д.Н. Численное решение статической задачи мембраны при линейной аппроксимации граничных параметров / Д.Н. Низомов // Сб. науч. тр. ТГУ: Строительство и архитектура. Вып. 2. Душанбе: ТГУ, 1992. С. 12–21.
11. Хуторянский Н.М. Применение метода гранично-временных элементов к решению трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости / Н.М. Хуторянский, В.В. Турилов // Сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: Горьк. ун-т, 1984. С. 30–39.
12. Громадка Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах / Т. Громадка, Ч. Лей. М.: Мир, 1990. 303 с.
13. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
14. Низомов Д.Н. Метод граничных элементов в решении задач статики мембраны / Д.Н. Низомов // Сб. науч. трудов ТПИ. Душанбе, 1988. С. 167–173.
15. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. М.: Наука, 1970. 664 с.
16. Корнейчук Н.П. Сплаины в теории приближения / Н.П. Корнейчук. М.: Наука, 1984. 352 с.
17. Низомов Д.Н. Параметрическое представление поверхностей для решения пространственных задач теории упругости методом граничных уравнений / Д.Н. Низомов // Вестник Хорогского ун-та. 2002. Сер. 1. № 5. С. 133–139.
18. Стенкин С.Б. Сплаины в вычислительной математике / С.Б. Стенкин, Ю.Н. Субботин. М.: Наука, 1976. 248 с.
19. Ишлинский А.Ю. Механика. Новое в зарубежной науке. Том 15. Метод граничных интегральных уравнений / А.Ю. Ишлинский, Г.Г. Черный; под ред. Т. Круз, Ф. Риццо. М.: Мир, 1978. 210 с.
20. Низомов Д.Н. Численное решение граничного уравнения при сплайн-аппроксимации граничных параметров / Д.Н. Низомов, О.А. Ходжибоев, А.А. Ходжибоев, Р.Р. Саидов // Вестник Тадж. технич. ун-та. Сер. Инженерные исследования. 2016. № 2(34). С. 110–117.
21. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении задач по расчету горных выработок / Д.Н. Низомов // Матер. междунар. конф. «Горные регионы Центральной Азии». Душанбе: ТГУ, 1999. С. 237.
22. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. М.: Мир, 1981. 216 с.