УДК 517.983
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-12-22-28

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

С.М. Чоюбеков, Н.Т. Мустафаева

Аннотация. Рассмотрен параметр регуляризации для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Уравнение Вольтерра первого рода – это интегральное уравнение, которое имеет точное решение только в некоторых случаях. Предел интегрирования был проведен в очень небольших количествах по неклассическим линейным и нелинейным интегральным уравнениям с переменными пределами. Построение решений в этих работах основано на численных методах. Цель исследования – построение регуляризирующего оператора и выбор параметра регуляризации. Построен регуляризирующий оператор по М.М. Лаврентьеву и доказана теорема единственности. Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, техники, экологии, медицины, геофизики, теории управления сложными системами.

Ключевые слова: интегральные уравнения; искомая функция; единственность; переменные; малый параметр; условие; пространство.

БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ КЛАССИКАЛЫК ЭМЕС СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУНУ ЖӨНГӨ САЛУУ

С.М. Чоюбеков, Н.Т. Мустафаева

Аннотация. Биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык Вольтерра теңдемесин чыгаруу үчүн жөнгө салуу параметри каралат. Биринчи түрдөгү Вольтерра теңдемеси айрым учурларда гана так чыгарылышы бар интегралдык теңдеме. Интеграция чеги өзгөрүлмө чектери бар классикалык эмес сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер боюнча өтө аз санда жүргүзүлдү. Бул эмгектерде маселелерди түзүү сандык методдорго негизделген. Изилдөөнүн максаты – жөнгө салуучу операторду түзүү жана жөнгө салуу параметрин тандоо. М.М. Лаврентьев боюнча жөнгө салуучу оператор түзүлүп, жалгыздык теоремасы далилденген. Сунушталган методдорду Вольтеррдин биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин тибиндеги интегралдык, интегралдык-дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн, ошондой эле физика, техника, экология, медицина, геофизика, татаал системаларды башкаруу теориясы жаатындагы айрым колдонмо процесстерди сапаттык изилдөөдө колдонууга болот.

Түйүндүү сөздөр: интегралдык теңдемелер; талап кылынган функция; жалгыздык; өзгөрмөлөр; кичинекей параметр; шарт; мейкиндик.

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF A NON-CLASSICAL NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

S.M. Choyubekov, N.T. Mustafaeva

Abstract. The article regards a regularization parameter for solving the linear Volterra integral equation of the first kind. The Volterra equation of the first kind is an integral equation that has an exact solution only in some cases. The limit of integration has been carried out in very small quantities on non-classical linear and nonlinear integral equations with variable limits and the construction of solutions in these works is based on numerical methods. The aim of the study is to construct a regularizing operator and select a regularization parameter. The regularizing operator according to M.M. Lavrentiev is constructed and the uniqueness theorem is proved. The proposed methods can be used for the study of integral, integro-differential equations such as the Volterra integral equation of the first kind, as well as for the qualitative study of some applied processes in physics, engineering, ecology, medicine, geophysics, and the theory of control of complex systems.

Keywords: integral equations; desired function; uniqueness; variables; small parameter; condition; space.

Киришүү. Интегралдык теңдемелердин теориялык бөлүгү көптөгөн эмгектерде окулуп, изилденген. Атап айтканда, [1] жумушта “Вольтерра тибиндеги биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин сандык чечими каралган [2–6] эмгектерде Вольтерранын интегралдык теңдемелерин чечүүнүн ар түрдүү жолдору каралган [7] жумушта Липшицтин шарттары менен классикалык эмес интегралдык теңдемелерди чечими үчүн регуляризациялоо оператору тургузулган [8] жумушта Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин чечими каралган [9] жумушта Вольтерранын биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин чечимине регуляризациялоо параметр тургузулган [10]. Үзгүлтүксүз функциялар мейкинигинде биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин чечими жөнүндө каралаган.

Бул эмгекте Вольтерранын биринчи түрдөгү сызыктуу эмес классикалык эмес интегралдык теңдемесинин чечиминин жалгыздыгы каралды.

Маселенин коюлушу. Төмөнкү теңдемени карайлы:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s,u(s))ds = f(t)\,;\; t\in[t_0,T] \tag{1}$$

мында $\alpha(t)\in C[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=t_0$, $\alpha(t)\le t$, $f(t)$ функциясы $[t_0,T]$ кесиндисинде жана $K(t,s,u(s))$ функциясы $G=\{(t,s):\;\; t_0\le t\le T,\;\; \alpha(t)\le s\le t\}$ $(\tau\le t\quad \alpha(\tau)\le\alpha(t))$ аймагында берилген функциялар.

$u(t)-$ $[t_0,T]$ кесиндисинде изделүүчү функция.

Маселени чечүү. Төмөнкү шарттар аткарысын:

1^0 Дээрлик бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн $\alpha'(t)>0$ жана $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$;

2^0 Фиксирленген $t\in[t_0,T]$ үчүн, $K_0(t,s)\in L[\alpha(t),T]$ жана дээрлик бардык $t\in[t_0,T]$ үчүн $K_0(t,t)\ge m>0$;

3^0 $\forall t,\tau$, $(t>\tau)$ үчүн жана бардык $(t,s),(\tau,s)\in G$ үчүн $|K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)|\le L_0\,|t-s|$, $L_0>0-const$.

4^0 Бардык (t,τ,u_1), (s,τ,u_1), (t,τ,u_2) жана $(s,\tau,u_2)\in G\times R$ үчүн $|K_1(t,\tau,u_2)-K_1(s,\tau,u_2)-K_1(t,\tau,u_1)+K_1(s,\tau,u_1)|\le L_1\,|t-s||u_1-u_2|$, $L_1>0-const$. $\forall(t,u)\in[t_0,T]\times R$ үчүн $K_1(t,t,u)\equiv 0$ жана $K_1(\alpha^{-1}(t),t,u)\equiv 0$, $\forall(t,s)\in G$ үчүн $K_1(t,s,0)\equiv 0$

(1) теңдемеде

$$K(t,s,u(s))=K_0(t,s)u(s)+K_1(t,s,u(s))$$

көрүнушүндө болсун. Анда (1) теңдеме төмөнкү көрүнүштү алат:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)u(s)ds+\int_{\alpha(t)}^{t} K_1(t,s,u(s))ds = f(t)\,;\; t\in[t_0,T] \tag{2}$$

Бул (2) теңдеме менен бирге

$$\varepsilon v(t,\varepsilon) + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} K_0(t,s)v(s,\varepsilon)ds + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} K_1(t,s,v(s,\varepsilon))ds = f(t) + \varepsilon u(t_0)\,;\; t\in[t_0,T] \tag{3}$$

теңдемесин карайлы, мында $0<\varepsilon<1$ кандайдыр кичинекей параметр.

Анын чечимин

$$v(t,\varepsilon) = u(t) + \xi(t,\varepsilon)\,; \tag{4}$$

көрүнүшүндө издейли, мында $u(t)$ (2) теңдеменин чечими, а $\xi(t,\varepsilon)$ белгисиз функция.

(4) чечимди (3) теңдемеге коюп, бир топ өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзүп [8–10], төмөнкү теңдемени алабыз:

$$\xi(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau +$$

$$+\int\limits_{\alpha(t)}^{t} N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau + U(t,\varepsilon)\,;\; t\in[t_0,T] \tag{5}$$

ээ болобуз. Мында

$$H_0(t,\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}K_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0(s,s)ds}\,; \tag{6}$$

$$H_1(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)\right] + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau)\right] -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\tau}\left[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)\right]ds\,; \tag{7}$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)\right] -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\tau}^{t}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\tau}\left[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)\right]ds\,; \tag{8}$$

$$N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau))]\,; \tag{9}$$

$$N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau)) -$$

$$-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) + K_1(\tau,\tau,u(\tau))] - \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_1(t,\tau,u(\tau)+$$

$$+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau)) + K_1(s,\tau,u(\tau))]ds\,; \tag{10}$$

$$N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau)) + K_1(\tau,\tau,u(\tau))] -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau)) + K_1(s,\tau,u(\tau))]ds; \qquad (11)$$

$$U(t,\varepsilon) = -[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)ds} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds. \qquad (12)$$

Эми негизги жыйынтыктарга өтөбүз. [9, 10] эмгектерде далилденген леммаларды пайдаланып, 1-лемманы далилдөөсүз келтирели.

1-лемма. 1^0-2^0 шарттар орун алсын жана $U(t,\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ функциясы (11) формула менен аныкталсын. Анда:

1) эгерде $u(t) \in C[t_0,T]$, болсо, анда $[t_0,T]$ кесиндисинде

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \le 3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta) = C_0(\varepsilon);\ 0 < \beta \le 1, \qquad (13)$$

баалоо туура болот, мында $\omega_u(\delta) = \sup_{|t-s|\le\delta}|u(t)-u(s)|$;

2) Эгерде $u(t) \in C^\gamma[t_0,T]$, $0 < \gamma \le 1$ болсо, анда

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \le C_0 C_\gamma \gamma\varepsilon^\gamma, \qquad (14)$$

баалоо туура болот, мында $C_\gamma = \sup_{t,s\in[t_0,T]}\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$; $C_0 = \int_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$.

2-лемма. 1^0-3^0 жана 4^0 шарттар аткарылсын жана $N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, $N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ жана $N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ функциялары тиешелүү түрдө (7), (8) жана (9) формулалары менен аныкталсын. Анда төмөнкү баалоолор туура болот:

$$1)\ |N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1 e^{-1}}{m}|\xi(\tau,\varepsilon)|; \qquad (15)$$

$$2)\ |N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1}{m}\left(\frac{e^{-1}}{m} + 2e^{-1} + 1\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|; \qquad (16)$$

$$3)\ |N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1}{m}|\xi(\tau,\varepsilon)|. \qquad (17)$$

Далилдөө. Леммалардын шарттарын эске алуу менен (9), (10) жана (11) формулаларын баалоого өтөбүз (9) ден:

$$|N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| = \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(\tau,\tau)d\tau}|K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$-K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau))\Big|\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))}L_1(t-\alpha^{-1}(\tau))\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|\le\sup_{v\ge 0}e^{-mv}v\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|L_1\le\frac{L_1}{m}e^{-1}\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|.$$

(15) баалоо далилденди.

(10) ден:

$$\left|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\le\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)}L_1(t-\tau)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}L_1(t-s)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|ds=\begin{vmatrix}u=t-s, & dv=\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}ds,\\ du=-ds, & v=e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\end{vmatrix}\le$$

$$\le\frac{L_1}{m}\sup_{v\ge 0}[e^{-mv}v]+\frac{1}{\varepsilon}(t-s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}L_1\Big|_{s=\tau}^{s=\alpha^{-1}(\tau)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}L_1e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}ds\le$$

$$\le\left\{\frac{L_1e^{-1}}{m^2}+L_1\left[\frac{t-\alpha^{-1}(\tau)}{\varepsilon}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))}+\frac{t-\tau}{\varepsilon}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)}\right]+\frac{L_1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)}ds\right\}\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|\le$$

$$\le\left[\frac{L_1e^{-1}}{m^2}+2L_1\sup_{v\ge 0}(e^{-mv}v)+\frac{L_1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{m}(e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))}-e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)})\right]\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|\le\frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m}+2e^{-1}+1)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|;$$

(17) баалоо далилденди.

(11) төн:

$$\left|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\right|\le\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau}L_1(t-\tau)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\times$$

$$\times L_1(t-s)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|ds\le\begin{vmatrix}u=t-s, & dv=\frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}ds,\\ du=-ds, & v=e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau}L_1(t-\tau)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}L_1(t-s)\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|\Big|_{s=\tau}^{s=t}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}L_1\int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}ds\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|\le\frac{L_1}{\varepsilon}\int_\tau^t e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)}ds\le\frac{L_1}{m}\left|\xi(\tau,\varepsilon)\right|.$$

(17) баалоо далилденди. Демек 4-лемма далилденди.

Теорема. 1^0-4^0 шарттар орун алсын жана

$$\beta_1=\gamma_0e^{M(T-t_0)}<1$$

болсун. Мында

$$\gamma_0=\sup_{\upsilon\in[t_0,T]}\frac{\left|K_0(\upsilon,\alpha(\upsilon))\right|\alpha'(\upsilon)}{K_0(\upsilon,\upsilon)},\ M=\frac{2L_0}{m}(e^{-1}+1)+\frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m}+3e^{-1}+2).$$

Анда: 1) эгерде (1) теңдеме $C[t_0, T]$ мейкиндигинде $u(t)$ чечимге ээ болсо, анда $\varepsilon \to 0$ умтулганда, (2) теңдеменин $v(t,\varepsilon)$ чечими, $C[t_0, T]$ нормасы боюнча, $u(t)$ чечимине жыйналат жана төмөнкү

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le \frac{e^{M(T-t_0)}}{1-\beta_1}[3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{1-\beta}} + w_u(\varepsilon^\beta)], \tag{21}$$

баалоо туура.

Мында $w_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{|t-s|\le\varepsilon^\beta} |u(t) - u(s)|$;

2) эгерде (1) интегралдык теңдеме $C^\gamma[t_0, T]$, $(0 < \gamma \le 1)$ мейкиндигинде $u(t)$ чечимге ээ болсо, анда $\varepsilon \to 0$ умтулганда, (2) теңдеменин $v(t,\varepsilon)$ чечими, $C[t_0, T]$ мейкиндигинин нормасы боюнча, $u(t)$ чечимине жыйналат жана төмөнкү

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le \frac{e^{M(T-t_0)}}{1-\beta_1} C_0 C_\gamma \gamma \varepsilon^\gamma, \tag{22}$$

баалоосу туура.

Мында $C_0 = \int\limits_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$, $C_\gamma = \sup\limits_{t,s\in[t_0,T]} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$.

Далилдөө. 1-лемма, 2-лемма жана 4-леммалардын негизинде (5) интегралдык теңдемеден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |H_1(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \int\limits_{\alpha(t)}^{t} |H_2(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} |N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau +$$

$$+\int\limits_{\alpha(t)}^{t} |N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau + |U(t,\varepsilon)|;\ t\in[t_0,T];$$

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \gamma_0 \|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C + \int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} [\frac{L_0}{m}(2e^{-1}+1) + \frac{L_0}{m}]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{\alpha(t)} [\frac{L_1 e^{-1}}{m} + \frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m} + 2e^{-1} + 1) + \frac{L_1}{m}]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + U(t,\varepsilon)\ \ t\in[t_0,T].$$

Мындан $\forall t \in [t_0, T]$ үчүн

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \gamma_0 \|\xi(t,\varepsilon)\|_C + \int\limits_{t_0}^{t} M\,|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + |U(t,\varepsilon)|$$

барабарсыздыгын алабыз. Мында

$$M = \frac{2L_0}{m}(e^{-1}+1) + \frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m} + 3e^{-1} + 2).$$

Бул барабарсыздыкка Гроноулл–Белмандын барабарсыздыгын колдонуп, төмөнкү барабарсыздыкты алабыз:

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \gamma_0 e^{M(T-t_0)}\|\xi(t,\varepsilon)\|_C + e^{M(T-t_0)}\|U(t,\varepsilon)\|_C .$$

Мындан 1-лемманын негизинде (22) келип чыгат. 1-теорема далилденди.

Корутунду

Регуляризациялоо үчүн параметр тандалган. Регуляризациялоочу оператор М.М. Лаврентьев боюнча тургузулган жана жалгыздык теоремасы далилденген.

Поступила: 25.10.2023; рецензирована: 10.11.2023; принята: 12.11.2023.

Адабияттар

1. *Апарцин А.С.* Численное решение интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра / А.С. Апарцин. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1981. 26 с.
2. *Бухгейм А.Л.* Об одном классе операторных уравнений Вольтерра первого рода / А.Л. Бухгейм // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Вып. 1.
3. *Денисов А.М.* О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А.М. Денисов // Журнал ВМ и МФ. 1975. 15. № 4. С. 1053–1056.
4. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // ДАН СССР. 1959. Т. 127. № 1. С. 31–38.
5. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего родов / Н.А. Магницкий // Журнал ВМ и МФ. 1979. № 4. С. 970–989.
6. *Цалюк З.Б.* Интегральное уравнения Вольтерра / З.Б. Цалюк // Итоги науки и техники. Мат. Анализ. 1977. № 15. С. 131–198.
7. *Асанов А.* Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра первого рода с условиями Липщица / А. Асанов, С.М. Чоюбеков // Точная наука. Кемерово, 2018. Вып. 23. С. 6–11.
8. *Асанов А.* Решения нелинейных уравнений Воль терра первого рода / А. Асанов, С.М. Чоюбеков // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2020. № 12. С. 3–8.
9. *Асанов А.* Выбор параметра регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменными пределами интеграла / А. Асанов, С.М. Чоюбеков // Известия вузов Кыргызстана. 2018. № 1. С. 6–10.
10. *Асанов А.* О решении неклассического интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций / А. Асанов, С.М. Чоюбеков // Вестник ЖАГУ. Жалал-Абад, 2018. № 4. С. 27–35.