УДК 517.97

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

А.К. Керимбеков

Рассмотрен новый метод решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма. Найдено достаточное условие существования решения нелинейного интегрального уравнения и доказана единственность найденного решения.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение; единственность решения; характеристическое число; ортогональность.

METHOD SOLVING OF NONLINEAR FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

A.K. Kerimbekov

It is considered the new method solving of nonlinear Fredholm integral equation. It is found the sufficient condition for the existence of a solution of the nonlinear integral equation and it is proved uniqueness of the found solution.

Keywords: nonlinear integral equation; uniqueness of solution; characteristic number; orthogonality.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида [1]

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt+f(x), \tag{1}$$

где $K(x,t,\varphi(t))$ – заданная функция, непрерывная по всем аргументам и имеющая непрерывную производную $K_\varphi(x,t,\varphi(t))$ по функциональной переменной $\varphi(t)$; $f(x)$ – известная непрерывная функция; λ – параметр; a и b заданные числа.

I. *Существование решения.* Решение уравнения (1) ищем в виде суммы

$$\varphi(x)=\varphi_0(x)+\lambda u(x), \tag{2}$$

где $\varphi_0(x)$ и $u(x)$ – неизвестные функции. Подставляя в (1), имеем соотношение

$$\varphi_0(x)+\lambda u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi_0(t)+\lambda u(t))dt+f(x). \tag{3}$$

В силу равенства

$$K\left[x,t,\varphi_0(t)+\lambda u(t)\right]=K\left[x,t,\varphi_0(t)\right]+K_\varphi\left[x,t,\bar\varphi(t)+\right]\lambda u(t), \tag{4}$$

которое справедливо при каждом фиксированном $t\in(a,b)$, как формула Лагранжа о конечных приращениях [2], соотношение (3) перепишем в виде

$$\varphi_0(x)+\lambda u(x)=\lambda\int_a^b\left\{K\left[x,t,\varphi_0(t)\right]+K_\varphi\left[x,t,\bar\varphi(t)+\right]\lambda u(t)\right\}dt+f(x), \tag{5}$$

где $\bar\varphi(t)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая условию $\varphi_0(x)<\bar\varphi(x)<\varphi(x)$ при каждом фиксированном $t\in(a,b)$. В соотношении (5) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ имеем следующие соотношения:

$$\varphi_0(x)=f(x), \tag{6_0}$$

$$u(t)=\int_a^b K\left[x,t,\varphi_0(t)\right]dt=\int_a^b K\left[x,t,f(t)\right]dt, \qquad (6_1)$$

$$0=K_\varphi\left[x,t,\overline{\varphi}(t)\right]u(t)\,dt. \qquad (6_2)$$

Поскольку функции $\varphi_0(x)$ и $u(x)$ уже определены, то, разрешая соотношение (4) относительно функции $\overline{\varphi}(t)$, находим, что существует [2] хотя бы одна функция $\psi(t,\lambda)$ такая, что

$$\overline{\varphi}(t)=\psi(t,\lambda). \qquad (7)$$

Поэтому равенство (6_2) перепишем в виде

$$\int_a^b K_\varphi\left[x,t,\psi(t,\lambda)\right]u(t)\,dt=0. \qquad (8)$$

Это равенство является достаточным условием существования решения уравнения (1). Отметим, что, если функция $K(x,t,\varphi(t))$ имеет отличную от нуля производную второго порядка по функциональной переменной $\varphi,$ то функция (7) определяется однозначно.

II. *Единственность решения.* Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), т. е. пусть имеют место тождества

$$\varphi_1(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi_1(t))dt+f(x),$$

$$\varphi_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,t,\varphi_2(t))dt+f(x).$$

Отсюда имеем тождество

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\lambda\int_a^b\left[K(x,t,\varphi_1(t))dt-K(x,t,\varphi_2(t))\right]dt,$$

которое, согласно соотношению

$$K(x,t,\varphi_1(t))dt-K(x,t,\varphi_2(t))=K_\varphi(x,t,\overline{\varphi}(t))\left[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right],$$

где функция $\overline{\varphi}(t)$ определяется указанным выше способом, перепишем в виде

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\lambda\int_a^b K_\varphi(x,t,\overline{\varphi}(t))\left[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\right]dt. \qquad (9)$$

Это линейное однородное интегральное уравнение. Оно имеет только нулевое решение, если параметр λ не является характеристическим числом ядра $K_\varphi(x,t,\overline{\varphi}(t)).$ Отсюда следует, что:

Если параметр λ не является характеристическим числом ядра $K_\varphi(x,t,\overline{\varphi}(t)),$ где $\overline{\varphi}(t)$ – известная функция, то решение уравнения (1) единственно.

Теорема: Для того чтобы нелинейное интегральное уравнение (1) имело единственное решение, достаточно, чтобы ядро $K_\varphi(x,t,\overline{\varphi}(t))$ имеющее отличную от нуля производную второго порядка по функциональной переменной $\varphi,$ не имело характеристических чисел и удовлетворяло условию ортогональности (8).

Пример 1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна (скалярный случай).

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b\alpha(x)\left[b_0(t)\varphi^n(t)+b_1(t)\varphi^{n-1}(t)+\ldots+b_{n-1}(t)\varphi(t)+b_n(t)\right]dt+f(x), \qquad (10)$$

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\alpha(x),\quad u_0=\int_a^b\left[b_0(t)f^n(t)+\ldots+b_{n-1}(t)f(t)+b_n(t)\right]dt. \qquad (11)$$

Подстановка (11) в (10) приводит к соотношению

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lambda\int_a^b \alpha(x)\Big[b_0(t)\big(f(t)+\lambda\alpha(t)\big)^n+\ldots+b_{n-1}(t)\big(f(t)+\lambda\alpha(t)\big)+b_n(t)\Big]dt+f(x)=\\ &= f(x)+\lambda\alpha(x)u_0+\Big\{h_{n-1}(\lambda u_0)+h_{n-2}(\lambda u_0)^2+\ldots+h_1(\lambda u_0)^{n-1}+h_0(\lambda u_0)^n\Big\}=\\ &= f(x)+\lambda\alpha(x)u_0+\lambda\alpha(x)\Big\{h_{n-1}+h_{n-2}(\lambda u_0)+\ldots+h_1(\lambda u_0)^{n-2}+h_0(\lambda u_0)^{n-1}\Big\}=\\ &= \Big|h_0(\lambda u_0)^{n-1}+h_1(\lambda u_0)^{n-2}+\ldots+h_{n-2}(\lambda u_0)+h_{n-1}=0\Big|=f(x)+\lambda\alpha(x)u_0.\end{aligned} \tag{12}$$

Функция

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\alpha(x)u_0 \tag{13}$$

будет решением уравнения (10), если параметр λ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$h_0(\lambda u_0)^{n-1}+h_1(\lambda u_0)^{n-2}+\ldots+h_{n-2}(\lambda u_0)+h_{n-1}=0, \tag{14}$$

которое имеет $n-1$ корней, среди которых могут быть простые, комплексные и кратные корни. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ корни уравнения (14). Подставляя их в (12) получим $n-1$ решений уравнения (10):

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda_1\alpha(x)u_0,\ldots,\varphi_{n-1}(x)=f(x)+\lambda_{n-1}\alpha(x)u_0. \tag{15}$$

Примечание. В этом примере условие “ортогональности”, т. е. условие (8), имело место за счет выбора λ. Уравнение (10) может иметь решение при любом значении параметра λ, если имеют место следующие условия ортогональности:

$$\begin{aligned}&h_0=\int_a^b b_0(t)a^n(t)\,dt=0;\\ &h_1=\int_a^b\big(b_0(t)f(t)+b_1(t)\big)a^{n-1}(t)\,dt=0;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &h_{n-1}=0.\end{aligned} \tag{16}$$

Пример 2 (векторный случай). Пусть в уравнении (10) функции *α(x)* и $b_i(x)$ являются *m*-мерными вектор-функциями. В этом случае решение имеет вид

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\alpha^*(x)u_0=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^m\alpha(x)u_0, \tag{17}$$

и параметр λ может быть определен как решение системы алгебраических уравнений

$$\bar h_{n-1}-\bar h_{n-2}\lambda-\bar h_{n-3}\lambda^2-\ldots-\bar h_1\lambda^{n-2}-\bar h_0\lambda^{n-1}=0, \tag{18}$$

где $\bar h$ – *m*-мерные векторы специфического вида.

Заметим, что при *m=1* соотношение (18) превращается в алгебраическое уравнение (12).

Систему (18) перепишем в виде

$$\bar h_{n-1}\cdot 1-\bar h_{n-2}\lambda-\bar h_{n-3}\lambda^2-\ldots-\bar h_1\lambda^{n-2}-\bar h_0\lambda^{n-1}=\theta. \tag{18'}$$

Эта система имеет ненулевое решение

$$1,\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n-2},\lambda^{n-1},$$

если имеет места равенство [3]

$$\Delta=\left|\bar h_{n-1},\ldots,\bar h_0\right|=\begin{vmatrix}h_{1,n-1} & \ldots & h_{1,0}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ h_{m,n-1} & \ldots & h_{m,0}\end{vmatrix}=h_{1,n-1}A_{1,n-1}+\ldots+h_{1,0}A_{1,0}=0, \tag{19}$$

где $A_{i,j}$ – алгебраическое дополнение элементов первой строки.

Полагая $A_{1,n-1} \neq 0$, равенство (19) перепишем в виде

$$h_{1,n-1} \cdot 1 + h_{1,n-2} \cdot \frac{A_{1,n-2}}{A_{1,n-1}} + \ldots + h_{1,0} \cdot \frac{A_{1,0}}{A_{1,n-1}} = 0. \qquad (19^{'})$$

Сравнивая (18') и (19'), находим, что

$$\lambda = \frac{A_{1,n-2}}{A_{1,n-1}}, \quad \lambda^2 = \frac{A_{1,n-3}}{A_{1,n-1}} = \left(\frac{A_{1,n-2}}{A_{1,n-1}}\right)^2, \ldots, \lambda^{n-1} = \frac{A_{1,0}}{A_{1,n-1}} = \left(\frac{A_{1,n-2}}{A_{1,n-1}}\right)^{n-1}. \qquad (20)$$

Эта система равенств является достаточным условием существования решения уравнения (1) (в векторном случае).

Литература

1. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1 / Г.М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1969. 608 с.
3. *Ильин В.А.* Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М.: Наука, 1974. 296 с.