УДК 501, 530.1

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ КРОККО

М.Р. Петриченко

Приводится аппроксимация решения интегрального уравнения Крокко и оценка значения искомой функции на левом конце промежутка значений аргумента (постоянной Блазиуса).

Ключевые слова: интегральное уравнение Крокко; постоянная Блазиуса; теорема Бонне.

THE INTEGRAL EQUATION OF THE CROCCO BOUNDARY PROBLEM

M.R. Petrichenko

The approximation of the solution in the integral Crocco equation and assessment of the value of the desired function on the left end of the range of the argument values (the Blazius's constant) is given.

Keywords: the integral Crocco equation; the Blazius's constant; Bonnet's theorem.

Цель работы – решение интегрального уравнения Крокко и оценка значения искомой функции на левом конце промежутка значений аргумента (постоянной Блазиуса).

Доказываются следующие утверждения:

- апостериорные оценки постоянной Блазиуса *a* определяются с погрешностью не выше 1,5 %, если в качестве приближенного решения использовать биномы невысокой степени;
- понижение порядка уравнения Крокко на единицу и использование теоремы о среднем Бонне приводит к апостериорной оценке постоянной Блазиуса *a*, *a* = 1/3;
- резольвентный ряд для интегрального уравнения Крокко расходится на правом конце промежутка значений аргумента.

1. Свойства решения предельной задачи Крокко [1]. Рассматривается типичная предельная задача Крокко на промежутке $(\eta_0,1)$, $0\le\eta_0<1$. Дано:

$$2\phi\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+\eta=0,\ 0\le\eta_0\le\eta\le1,$$
$$\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_0}=\phi(1)=0. \tag{1}$$

Свойства решений предельной задачи (1) содержатся в следующих утверждениях, формулируемых в виде лемм.

Лемма 1. Существуют две ветви решения предельной задачи (1), положительная и отрицательная. Вдоль положительной ветви решения *a:*= $j(h_0)^3j(h)^3$*0, и поэтому d*j*/d*h*<0,* $d^2\phi/d\eta^2<0$*; вдоль отрицательной ветви: a:* = $j(h_0)\le j(h)\le$*0, d*j*/d*h*>0,* $d^2\phi/d\eta^2>0$*. В известных задачах с физическим содержанием актуальна положительная ветвь решения типичной предельной задачи Крокко (1).*

Лемма $\boldsymbol{1_l}$**.** Рассмотрим однородную предельную задачу Крокко:

$$2\phi\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+\eta=0,\ D(\phi)=(\eta:0<\eta_0<\eta<1),$$
$$\phi(\eta_0)=\phi(1)=0,$$

решение которой состоит из положительной и отрицательной ветвей, ϕ^+ и ϕ^-. *Тогда в промежутке* $(\eta_0,1)$ *существует такое значение* η^**, что для каждой ветви* $d\phi^\pm/d\eta^*=0$*.*

Таким образом, положительная ветвь $\phi^+(\eta)$ решения однородной предельной задачи "сшивается" из 2 решений типичных предельных задач, ϕ_l^+, ϕ_r^+, таких, что:

$$\phi_l^+\Rightarrow D(\phi_l^+)=(\eta:0\le\eta_0<\eta<\eta^*),\phi_l^+(0)=d\phi_l^+/d\eta^*=0,$$
$$\phi_r^+\Rightarrow D(\phi_r^+)=(\eta:\eta^*<\eta<1),\phi_r^+(0)=d\phi_r^+/d\eta^*=0,$$

причем $\phi_l^+(\eta^*-0)=\phi_r^+(\eta^*+0)$. Точно также, отрицательная ветвь решения, ϕ^- сшивается из 2 решений типичных предельных задач ϕ_l^- и ϕ_r^-, таких, что:

$$\phi_l^-\Rightarrow D(\phi_l^-)=(\eta:0\le\eta_0<\eta<\eta^*),\phi_l^-(0)=d\phi_l^-/d\eta^*=0,$$
$$\phi_r^-\Rightarrow D(\phi_r^-)=(\eta:\eta^*<\eta<1),\phi_r^-(0)=d\phi_r^-/d\eta^*=0.$$

Из лемм 1, 1_1 следует, что предельная задача (1) Крокко оправдывает название типичной предельной задачи: однородная задача сужается на

2 типичные предельные задачи для каждой положительной ϕ^+, и отрицательной ϕ^-, ветвей решения. Поэтому справедлива

Теорема. Если известны ветви решения (положительная или отрицательная) типичной предельной задачи (1), то ветви решения однородной предельной получаются диффеоморфным продолжением (решения типичной предельной задачи) через точку экстремума. Итак, решения типичных предельных задач Крокко, $\phi_{l,r}^{\pm}(\eta)$, как видно, задают биекцию отрезка на себя, а решения $\phi^{\pm}(\eta)$ однородной предельной задачи Крокко задают сюрьекцию отрезка на себя.

Лемма 2. Положительная ветвь решения предельной задачи (1) равносильна решению задачи Коши:

$$2\phi\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+\eta=0,\ \mathfrak{D}(\phi)=$$
$$=(\eta:0<\eta_0<\eta),\mathfrak{Im}(\phi)=(\phi:0>a>\phi),\quad (1_1)$$
$$\phi(\eta_0)-a=\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)_{\eta=\eta_0}=0.$$

Существует единственное значение параметра a (постоянной Блазиуса) такое, что $\phi(1)=0$.

Лемма 3. Для типичной предельной задачи Крокко (1) справедливо тождество:

$$\int_{\eta_0}^{1}\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 d\eta=\frac{1-\eta_0^2}{4}.$$

Из лемм 1, 2 следует, что график распределения $\phi=\phi_{\pm}(\eta,\eta_0)$ представляет дугу параболы с бесконечно малой кривизной в вершине $\eta = 1–0$. Лемма 2 использована в работах [2, 3] по плоским (расщепляющим) рядам для предельной задачи Блазиуса. По сути дела, лемма 2 описывает редукцию двухточечной предельной задачи на задачу Коши (одноточечную предельную задачу). Строгое обоснование этого приема ("пристрелка") использует теорему о непрерывной зависимости решения ОДУ от параметров задачи [4].

Уравнение предельной задачи (1) можно записать в виде канонической системы. Пусть J – симплектическая матрица, $\mathbf{J}:=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{J}^{-1}=-\mathbf{J}$. Тогда уравнение задачи (1) имеет вид:

$$d\chi/d\cdot=Jgrad\mathcal{H}.\quad (1_2)$$

Здесь $\chi:=colon(\phi,\psi),\ \psi:=d\phi/d\eta,\ H=H(\eta,\phi,\psi)$ – функция Гамильтона, причем $grad\mathcal{H}=\mathbf{colon}(\partial\mathcal{H}/\partial\phi,\ \partial\mathcal{H}/\partial\psi)$. Простые подсчеты показывают, что $\mathcal{H}=1/2\left(\psi^2-\eta\ln(a/\phi)\right)$. Тогда $H\in C^{(1)}(U)$ – гладкое в области $U=(\eta,\phi,\psi: 0<\eta<1, 0<\phi<a, -\infty<\psi<0)$ распределение, что, в силу теоремы Коши, гарантирует существование решения задачи Коши (1_1) [4].

2. Интегральное уравнение Крокко. Формально интегрируя уравнение предельной задачи (1), получаем:

$$\frac{d\phi}{d\eta}=-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{tdt}{\phi(t)},\ \zeta(\eta)=\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{tdt}{\phi(t)}.\quad (2)$$

И дальше:

$$\phi(\eta)=\frac{1}{2}\int_{\eta}^{1}dt\int_{\eta_0}^{t}\frac{\tau d\tau}{\phi(\tau)}=\frac{1}{2}\left(\int_{\eta_0}^{1}-\int_{\eta_0}^{\eta}\right)dt\int_{\eta_0}^{t}\frac{\tau d\tau}{\phi(\tau)}=$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{\eta_0}^{1}\frac{(1-\tau)\tau d\tau}{\phi(\tau)}-\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\tau(\eta-\tau)d\tau}{\phi(\tau)}\right\}.$$

Пусть область определения $\phi(\eta)$ – единичный отрезок, $D(\phi)=(\eta: 0<\eta<1)$, $\eta_0=0$. В силу леммы 2, $1/\phi(\eta)$ – положительное монотонное возрастающее распределение. Пусть θ – правильная дробь. Применяя теорему о среднем Бонне к интегралу в правой части интегрального уравнения (2), сразу получим "сокращенное" уравнение и его решение:

$$\frac{d\phi^2}{d\eta}=-1/2\left(1-\theta^2\right)\eta^2,\ \phi^2(\eta)=1/6\left(1-\theta^2\right)\left(1-\eta^3\right).$$

Тогда, в силу леммы 2:

$$a^2(\theta):=\phi^2(0)=1/6\left(1-\theta^2\right).$$

Стандартно вводятся $\boldsymbol{L}_p$, $p>1$, нормы:

$$\|a\|_p:=\left(\int_0^1 a^p(\theta)d\theta\right)^{1/p}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\int_0^1\left(1-\theta^2\right)^{p/2}d\theta\right)^{1/p},$$

и несложные подсчеты показывают:

$$\|a\|_p=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(p/2+1)}{\Gamma(p/2+3/2)}\right)^{1/p}.$$

В силу неравенства Гельдера-Коши:

$$\mathbf{L}_s\subset\mathbf{L}_r, r<s,$$

и поэтому $\|a\|_r<\|a\|_s$.

Пусть $p\to+0$. Тогда:

$$\lim_{p\to+0}\left(\frac{\Gamma(p/2+1)}{\Gamma(p/2+3/2)}\right)^{\frac{1}{p}}=\exp\left(1/2\left(\psi(1)-\psi(3/2)\right)\right),$$

где $\psi(z):=d\ln\Gamma(z)/dz$, причем $\psi(1)=-C$, C – постоянная Эйлера–Маскерони, $C = 0,5772\ldots$, $\psi(3/2) = 0,8862\ldots$.

Тем самым доказана формула:

$$\|a\|_0=\|a\|_\infty\exp\left(1/2\left(\psi(1)-\psi(3/2)\right)\right)<\|a\|_\infty.$$

Несложные вычисления приводят к такой возрастающей последовательности:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{6}}=\|a\|_1<\|a\|_2=1/3<.....<\|a\|_\infty=1/\sqrt{6}.$$

При p = 2 получаем удивительно точное (погрешность 0,1 %) рациональное приближение для значения постоянной (Блазиуса) a, a = 1/3 и такую биномиальную аппроксимацию решения предельной задачи Крокко (1), $\eta_0 = 0$:

$$\phi(\eta)=1/3\sqrt{1-\eta^3}.$$

Обозначим α некоторое среднее значение нормы a в промежутке значений 0<p<1. Например, если:

$$\alpha=1/2\left(\|a\|_0+\|a\|_\infty\right),$$

то α = 0,346…, и это значение отличается от точного на 4,5 %.

Применение этой схемы для уравнения Крокко с предельными условиями: $\phi'(\eta_0)=\phi(1)=0, 0\le\eta_0\le\eta<1, p=2,$ приводит к выражению:

$$\phi(\eta)=\sqrt{1/9\left(1-\eta^3\right)-\eta_0/12\left(1-\eta^2\right)-\eta_0^2/6\left(1-\eta\right)}. \quad (3)$$

Пусть h_0= 0. Тогда, в силу (3), $\phi(\eta)=1/3\sqrt{1-\eta^3}$. Если h = h_0, то из формулы (3) получаем:

$$\phi(\eta_0):=\|a\|_2=1/3\left(1-\eta_0\right)\sqrt{1+5/4\eta_0}. \quad (3_1)$$

3. Тестирование. По существу, тестирование приближенных решений типичной предельной задачи Крокко выполнено в предыдущем пункте. Сейчас рассмотрим несколько несложных предельных задач, близких к задаче Крокко.

3.1. Рассмотрим предельную задачу:

$$2\phi\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+1=0,\ \phi(0)\text{-}a=\left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)_{\eta=0}=\phi(1)=0, \quad (4)$$

решение которой имеет вид:

$$\eta=a\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{\ln\frac{a}{\phi}}\right). \quad (5)$$

Легко подсчитать, что $a = \pi^{-1/2}$ и что $\zeta = (\ln(a/\phi))^{1/2}$. Решение (5) можно записать в "явном" виде:

$$\eta=\mathrm{erf}(\zeta). \quad (5_1)$$

Тогда: $$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\int_0^\infty(1-\eta)\,d\zeta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (6)$$

Эти константы используем для тестирования приближенного решения.

Интегральное уравнение для предельной задачи (4) имеет вид:

$$2\frac{d\phi}{d\eta}=-\int_0^\eta\frac{dt}{\phi(t)}.$$

Тогда вместо точного уравнения (4) получается "сокращенное" уравнение первого порядка, зависящее от параметра θ, которое сразу же решается:

$$\frac{d\phi^2}{d\eta}=-\eta(1-\theta),$$

$$\phi(\eta,\theta)=\sqrt{\frac{1-\theta}{2}\left(1-\eta^2\right)}=a(\theta)\sqrt{1-\eta^2},$$

где $a(\theta):=\sqrt{\dfrac{1-\theta}{2}}.$

Пусть α – какая-то $\boldsymbol{L}_p$ – норма a. Именно:

$$\|a\|_p=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+p/2\right)^{-1/p}.$$

Тогда, при изменении p в промежутке 0<p<∞,

$\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\le\alpha\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и среднее геометрическое значение α составляет, например, $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}=0,5507$, что отличается от точного значения ($\pi^{-0,5}$) на 2,4 %.

Итак:

$$\phi(\eta)=\alpha\sqrt{1-\eta^2},$$

$$\zeta=-d\phi/d\eta=\frac{\alpha\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad (5_2)$$

$$\eta(\zeta)=\frac{\zeta}{\sqrt{\alpha^2+\zeta^2}},$$

и тогда:

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}=\frac{1}{\alpha},\int_0^\infty\left(1\text{-}\eta(\zeta)\right)d\zeta=\alpha. \quad (6_1)$$

Итак, интегральная оценка приближенного решения близка к точной.

3.2. Далее, вместо уравнения Крокко (1) второго порядка, решается уравнение низкого, первого порядка. Пусть функция ϕ(η) удовлетворяет обоим уравнениям, т. е. (1) – уравнению Крокко и "сокращенному" уравнению Крокко. Тогда:

$$2\phi\frac{d^2\phi}{d\eta^2}=-\eta,2\phi\frac{d\phi}{d\eta}=-\frac{\eta^2}{2}\left(1-\theta^2\right),$$

и, поделив первую строчку на вторую почленно, получим:

$$\frac{d\ln\phi_\theta'}{d\eta}=\frac{2}{\eta\left(1-\theta^2\right)},\frac{d\phi_\theta}{d\eta}=C\eta^{\frac{2}{1-\theta^2}},$$

$$\phi_\theta(\eta)=a\left(1-\eta^{\frac{3-\theta^2}{1-\theta^2}}\right),a=C\frac{1-\theta^2}{3-\theta^2},$$

где $\phi_\theta(\eta)$ – "общая" часть решения полного и "сокращенного" уравнения Крокко (1).

В силу леммы 3:

$$C^2\frac{1-\theta^2}{5-\theta^2}=1/4,\ C=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\theta^2}{1-\theta^2}},$$

$$\phi_\theta(\eta)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\left(5-\theta^2\right)\left(1-\theta^2\right)}}{3-\theta^2}\left(1-\eta^{\frac{3-\theta^2}{1-\theta^2}}\right).$$

Но, среднее арифметическое значение θ^2, $\theta^2 = 1/3$, и тогда:

$$\phi(\eta)=\frac{\sqrt{7}}{8}\left(1-\eta^4\right)=0{,}331\left(1-\eta^4\right).$$

Биномиальная аппроксимация $\phi(\eta)$ получена в работе [5] иначе. Погрешность вычисления константы Блазиуса *a* при этом не превосходит 0,3 %.

Получается, что применение теоремы Бонне о среднем позволяет свести интегральное уравнение Крокко к уравнению первого порядка и его решения, зависящие от θ, содержат все биномиальные аппроксимации точного решения. Недостаток биномиальных приближений целых степеней состоит в том, что для этих биномов величины производных $\phi'(1\text{-}0)$ и $\phi''(1\text{-}0)$ ограничены для положительной и отрицательной ветвей $\phi_\pm(\eta)$. Но этот факт противоречит уравнению Крокко и условию гладкости для обеих ветвей решения $\phi_\pm(\eta)$, $\eta\to 1\text{–}0$. Действительно, если $\phi_\pm(\eta)=\pm a\left(1-\eta^m\right)$, то тогда возникает угловая точка $\eta = 1\text{–}0$: $\left(d\phi_-/d\eta\right)_{\eta=1-0}-\left(d\phi_+/d\eta\right)_{\eta=1-0}=2am>0$.

4. Резольвента: ряд Бюрмана–Лагранжа, [6]. Сейчас будет доказано, что степенные разложения для j(h) расходятся на промежутке 0<h<1. Тем самым подтверждается результат работы [7], в которой также используется степенной ряд. Перепишем формулу (3) так:

$$\phi=a-1/2f(\phi),$$
$$f(\phi):=\int_0^\eta\frac{t(\eta-t)\,dt}{\phi(t)}, \qquad (3_2)$$

и, по формуле разложения Бюрмана–Лагранжа получаем:

$$\phi(\eta)=a-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\left(\frac{d}{d\phi}\right)^{k-1}\left(f(\phi)\right)^k_{\phi=a}=$$
$$=a-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\left(\frac{d}{da}\right)^{k-1}\left(f(a)\right)^k. \qquad (7)$$

Сейчас докажем, что резольвентный ряд (7*), на самом деле, расходится при h → 1–0, поэтому не* дифференцируем и непригоден для вычисления параметра *a*. Действительно, с учетом (3_1):

$$\phi(\eta)=a-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\left(\frac{\eta^3}{12}\right)^k\left(\frac{d}{da}\right)^{k-1}a^{-k}=$$
$$=a\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{2k-1}{k}}{2k-1}\left(\frac{\eta^3}{12a^2}\right)^k\right). \qquad (8)$$

где $\binom{s}{r}:=\dfrac{s!}{r!(s-r)!}:=C_s^r$ – биномиальный коэффициент.

Используя интегральный признак сходимости Адамара и асимптотическую оценку факториала [6], можно показать, что радиус r сходимости ряда (9) r = $3a^2$. Значит, $\eta^3<3a^2$, $\eta\le\left(3a^2\right)^{1/3}<1$. Используя оценки постоянной Блазиуса *a* из предыдущего пункта, видим, что ряд (9) расходится при h = 1, что и требовалось доказать. И, тем более, расходится ряд для дериватива *dj/d*h. Таким образом, непригодно использование разложения Бюрмана–Лагранжа (7) и степенного ряда (8) в качестве решения интегрального уравнения (3). Этот результат совпадает с выводами работы [7] о расходимости степенного ряда для решения уравнения Крокко при $\eta\to 1\text{-}0$.

Литература

1. *Луиджи Крокко* (L. Crocco). URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%BA%D0%BE,_%D0%9B%D1%83%D0%B8%D0%B4%D0%B6%D0%B8.
2. *Варин В.П.* Плоские разложения и их приложения / В.П. Варин // Препринты ИПМ РАН им. М.В. Келдыша. 2014. № 23. 25 с.
3. *Varin V.P.* A solution of the Blasius problem / V.P. Varin // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 6. С. 1022.
4. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. М.: Гос. издательство физико-математической литературы, 1961.
5. *Петриченко М.Р.* Приближенные оценки постоянной Блазиуса / М.Р. Петриченко // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского госуд. политехн. ун-та. Физико-математические науки. 2015. № 2 (218). С. 43–48.
6. *Уиттекер Е.Т.* Курс современного анализа / Е.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963.
7. *Ahmad F.* Application of Crocco-Wang equation to the Blasius problem / F. Ahmad // Electronic Journal "Technical Acoustics". 2007. Vol. 2.