

УДК 621.311.16

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

И.В. Белицын, С.О. Хомутов, Е.А. Котугин

Рассмотрен способ повышения точности измерений на программном уровне, на примере датчика Холла. Показано, что аппаратная функция датчика имеет характерный максимум, что необходимо учитывать при определении показателей качества энергии в электрических сетях. Представлены результаты моделирования распределения потенциала в датчике Холла.

Ключевые слова: качество электрической энергии; мониторинг; датчик Холла; линия электропередачи.

THE ASSESSMENT OF QUALITY INDICATORS FOR ELECTRIC ENERGY BASED ON THE ANALYSIS OF MAGNETIC FIELD

I. V. Belitsyn, S. O. Khomutov, E. A. Kotugin

This article considers the way of increase in accuracy of measurements at the program level, on the example of Hall sensor. It is shown that hardware function of the sensor has a characteristic maximum that needs to be considered when determining indicators of the energy quality in the electrical networks. The results of the Hall sensor potential distribution modeling are presented.

Keywords: energy quality; monitoring; Hall sensor; power transmission line.

Обеспечение потребителей качественной электрической энергией является одним из направлений повышения эффективности функционирования, как отдельных энергетических систем единой национальной энергетической системы, так и энергетического комплекса всей страны.

Показатели качества электрической энергии (ПКЭ) определяются ГОСТ 32144–2013. ПКЭ определяют уровни электромагнитной совместимости (ЭМС) как для индуктивных, так и кондуктивных электромагнитных помех в системах электроснабжения общего назначения. К основным ПКЭ можно отнести: размах изменения напряжения; длительность провала напряжения; импульсное напряжение; коэффициент n -ой гармонической составляющей напряжения; коэффициент искажения синусоидальности кривой напряжения; коэффициент несимметрии напряжений по обратной последовательности; коэффициент несимметрии напряжений по нулевой последовательности [1–3].

Для комплексной оценки показателей качества электрической энергии, а также и для экологической обстановки на объектах электроэнергетики требуется непрерывный мониторинг. Для обработки результатов измерений используются современ-

ные алгоритмы, в том числе на основе нейронных сетей. Оценка параметров качества электрической энергии также необходима для управления городскими электрическими сетями в рамках SMART GRID [4].

Оценка показателей качества электрической энергии возможна на основе анализа магнитного поля. Для определения характеристик магнитного поля предлагается использовать датчика Холла.

В случае, если измеряемое магнитное поле достаточно мало, как и ток датчика, то датчик Холла можно считать линейным. В этом случае холловская разность потенциалов и измеряемое значение магнитного поля имеет линейную связь, которую можно представить в виде интеграла свертки:

$$u_H(x, y) = \frac{IK_H}{S} \iint_S r(x', y') B(x - x', y - y') dx' dy', \quad (1)$$

где I – ток, протекающий в датчике Холла через его контакты; S – площадь поперечного сечения датчика Холла; K_H – коэффициент (константа) датчика Холла; $r(x, y)$ – аппаратная функция $r(x, y)$; $B(x, y)$ – распределение магнитного поля внутри объема датчика.

Соотношение (1) показывает, что разность потенциалов на потенциальных контактах датчика Холла определяется аппаратной функцией $r(x, y)$, которая инвариантна распределению поля и току, протекающему через датчик.

При $r(x, y) = 1$ минимальное изменение измеряемой величины, которое может определить датчик, определяется в первую очередь его размерами, в идеальном случае $r(x, y) = S\delta(x, y)$. В случае помещения датчика в однородное магнитное поле необходимо ввести нормировку:

$$\iint_S r(x, y) dx dy = S. \quad (2)$$

Предположим, общий вид аппаратной функции $r(x, y)$ зависит от геометрических размеров датчика и его контактов, и плотности тока в датчике.

Для обоснования (1) и определения аппаратной функции датчика Холла (рисунок 1), будем считать, что через его контакты течет постоянный ток I . Ось x проходит через токовые контакты Т1 и Т2, находящиеся на левой и правой гранях кристалла. Ось y проходит через потенциальные контакты П1 и П2, находящиеся на верхней и нижней гранях кристалла. В отсутствие магнитного поля внутри датчика устанавливается стационарное распределение плотности тока $j_0(x, y)$, которое является потенциальным [5]:

$$\text{rot} j_0(x, y) = 0, \quad (3)$$

$$\text{div} j_0(x, y) = 0. \quad (4)$$

Согласно [6], в этом случае должна быть скалярная потенциальная функция φ_0 , которая определяет распределение электрического поля внутри датчика:

$$E = -\text{grad}(\varphi_0). \quad (5)$$

Плотность тока рассчитывается согласно закону Ома записанного в дифференциальной форме:

$$J_0 = \sigma E = -\sigma \text{grad} \varphi_0. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (4), получаем уравнение Лапласа для распределения потенциала $\varphi_0(x, y)$:

$$\Delta \varphi_0(x, y) = 0. \quad (7)$$

Допустим, что проводимость материала контактов датчика как токовых, так и потенциальных намного превышает проводимость кристалла датчика Холла, в этом случае на границе датчика и контакта будет присутствовать только нормальная составляющая напряженности электрического поля.

В отсутствие магнитного поля внутри датчика ток через верхние потенциальные грани не происходит, следовательно, со стороны этих контактов

$j_{0y}(y = \pm b/2) = 0$, тогда с учетом (7) получим первое граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x, y = \pm b/2) = 0. \quad (8)$$

Со стороны токового контакта ($x = \pm a/2, |y| \leq \varepsilon/2$), с учетом постоянства тока и его равномерного распределения по всему токовому контакту будет существовать только x -компонента напряженности электрического поля, поэтому плотность тока составит:

$$j_{0x}(E = \pm d/2, |y| \leq \varepsilon/2) = \frac{I}{d\varepsilon},$$

где I – полный ток, протекающий через контакт; d – толщина датчика Холла; ε – ширина токовых контактов.

Со стороны датчика Холла на границе ($x = \pm a/2, |y| \leq \varepsilon/2$) потенциал φ_0 и плотность тока j_{0x} связаны соотношением (7), поэтому второе граничное условие для потенциала φ_0

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(E = \pm d/2, |y| \leq \varepsilon/2) = -\frac{I}{d\varepsilon\sigma}, \quad (9)$$

где σ – проводимость датчика Холла.

Для плотности тока вне токовых контактов:

$$\text{div} j_0(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(E = \pm d/2, |y| \leq \varepsilon/2) = 0. \quad (10)$$

Выражения (8)–(10) представляют собой известную краевую задачу Неймана для распределения потенциала φ_0 .

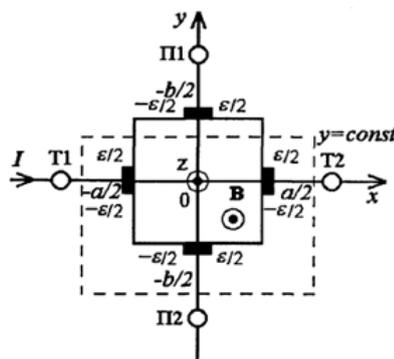


Рисунок 1 – Принципиальная схема датчика Холла:

Т1, Т2 – токовые контакты датчика,

П1, П2 – потенциальные контакты датчика

В случае, если ширина токовых и потенциальных контактов датчика намного меньше линейных размеров датчика, проводимость материала контактов кратно превышает проводимость кристалла, датчик помещен в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z (нет касательной составляющей вектора магнитной индукции), то распре-

деление потенциала φ_0 вдоль оси z можно считать равномерным, и можно перейти от трехмерной модели датчика Холла к его двумерной аппроксимации. В случае прямоугольного датчика с размерами $a \times b$ распределение потенциала находится методом разделения переменных.

Решение для потенциала φ_0 найдем в виде произведения двух функций одной переменной:

$$\varphi_0(E, y) = X(x)Y(y). \quad (11)$$

Подставив (11) в уравнение Лапласа (7), получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = k^2 Y.$$

В случае $k > 0$ решение уравнений имеет следующий вид:

$$X(x) = A \operatorname{sh}(kx) + B \operatorname{ch}(kx); \quad Y(y) = G \sin(ky) + H \cos(ky),$$

при $k = 0$

$$X_0 = E_0 x + F_0; \quad Y_0 = K_0 x + N_0,$$

где $A, B, G, H, E_0, F_0, K_0, N_0$ – постоянные, которые определяются краевыми условиями и симметрией.

Потенциал $\varphi_0(x, y)$ должен удовлетворять условиям симметрии (рисунок 1). В частности, вдоль оси y потенциал обязан быть четным, а вдоль оси x – нечетным. Тогда, учтя эти требования, получим распределение потенциала:

$$\varphi_0(x, y) = D + Cx + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sh}(k_m x) \cos(k_m y), \quad (12)$$

где C, D, A_m – постоянные, также определяемые в зависимости от краевых условий. D равно нулю, поскольку значение потенциала определяется с точностью до произвольной константы $\varphi_0(0, y) = 0$. Так как значение напряженности электрического поля на границе $y = \pm b/2$ равно нулю, то возможно определить совокупность констант $k_m = 2\pi m/b$. Константы C, A_m находятся из граничного условия (9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{x=a/2} &= C + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{2\pi m}{b} \operatorname{ch} \frac{\pi m a}{b} \cos \frac{2\pi m y}{b} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{2\pi m y}{b} = f(y), \end{aligned} \quad (13)$$

где $f(y)$ – функция, определяемая (9) и (10).

Найдя значение коэффициентов ряда Фурье, окончательно получим распределение потенциала φ_0 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= -\frac{I}{bd\sigma} x - \\ &- \frac{I}{\varepsilon d\sigma} b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / b)}{(\pi m)^2 \operatorname{ch}(\pi m a / b)} \operatorname{sh} \frac{2\pi m x}{b} \cos \frac{2\pi m y}{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Это распределение может быть получено альтернативно, численным интегрированием уравнения Лапласа (7), с учетом граничных условий (8)–(10).

Рассмотрим датчик Холла в неоднородном магнитном поле. Холловская разность потенциалов u_H на потенциальных контактах при отсутствии внешнего магнитного поля равна нулю из-за симметрии самого датчика и стационарного процесса протекания тока, т. е. выполняется условие (4). При нахождении датчика Холла во внешнем магнитном поле с известной индукцией магнитного поля B , на носители заряда будет действовать сила Лоренца [7]:

$$f_L = -e[vB] = [jB]/n, \quad (15)$$

где v – линейная скорость движения носителей заряда; n – концентрация носителей заряда; j – плотность тока.

В случае слабых полей, если $B \ll en/\sigma$ и $j(x, y) j_0(x, y)$, благодаря силе Лоренца появляется холловский ток:

$$j_H = \frac{\sigma [j_0 \times B]}{en}. \quad (16)$$

При стационарном режиме этот ток приводит к накоплению электрического заряда на верхней и нижней гранях кристалла и созданию между ними потенциального электрического поля $E(x, y) = -\operatorname{grad} \varphi_H(x, y)$. Оно в свою очередь создает поле электрического тока $j_E(x, y) = \sigma E(x, y)$.

В случае появления касательной компоненты вектора магнитной индукции это приведет к дополнительному накоплению зарядов на верхнем и нижнем основании кристалла, что создаст между ними дополнительное электрическое поле. При помещении ненагруженного датчика в слабое магнитное поле, вносимое им изменение в распределение тока незначительно и также можно считать $j(x, y) j_0(x, y)$. Напряжение между потенциальными контактами в этом случае определяется только нормальной составляющей вектора магнитной индукции магнитного поля:

$$\begin{aligned} u(x) &= \varphi_H(x, b/2) - \varphi_H(x, -b/2) = \\ &= \int_{-b/2}^{b/2} E_y(x, y) dy = \frac{1}{\sigma} \int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(x, y) dy \end{aligned} \quad (17)$$

Введем вспомогательную функцию – $f(x) = u(x)/u_H$.

Холловская разность потенциалов $u_H = u(0)$,

$$u_H = \int_{-b/2}^{b/2} E_y(0, y) dy = \frac{1}{\sigma} \int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(0, y) dy. \quad (18)$$

Если ввести вспомогательную функцию $f(x) = u(x)/u_H$

$$f(x) = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(x, y) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(0, y) dy}, \quad (19)$$

получим:

$$\frac{1}{f(x)} = \int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(x, y) dy = u_H \sigma. \quad (20)$$

Проинтегрировав (20) по x на отрезке $[-a/2, a/2]$, получим:

$$u_H = \frac{1}{a\sigma} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{1}{f(x)} \int_{-b/2}^{b/2} j_{E_y}(x, y) dy \right] dx. \quad (21)$$

Выделим контур, образованный в сечении $y = \text{const}$ линии, и замкнутый вне датчика Холла. На этом контуре построим замкнутую цилиндрическую поверхность, основания которой лежат вне датчика Холла. Для стационарного случая: $\text{div } j = \text{div } j_0 = 0$, где $j(x, y) = j_0 + j_H - j_E$ – полная плотность тока, то есть $\text{div } j_H = \text{div } j_E$. Интегрируя равенство по всему объему построенной поверхностью, и учитывая, что в случае ненагруженного датчика ток через потенциальные контакты не течет, получим:

$$\int_{-a/2}^{a/2} j_{H_y}(x, y) dx = \int_{-a/2}^{a/2} j_{E_y}(x, y) dx. \quad (22)$$

Также используем вспомогательную функцию:

$$v(y) = \frac{\int_{-a/2}^{a/2} j_{E_y}(x, y) dx}{\int_{-a/2}^{a/2} j_{E_y}(x, y) dx}. \quad (23)$$

Изменив в (21) порядок интегрирования, с учетом (22) и (23), получим:

$$u_H = \frac{1}{a\sigma} \int_{-b/2}^{b/2} \left[v(y) \int_{-a/2}^{a/2} j_{H_y}(x, y) dx \right] dy. \quad (24)$$

Преобразуем в (1) интеграл в кратный. Для этого заменим переменные интегрирования x, y на x', y' учитывая, что центр датчика Холла находится в точке с координатами x, y , получим четности функций $v(y)$ и $j_0(x, y)$:

$$u_H(x, y) = \frac{1}{ane} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} v(y') j_{0x}(x', y') B(x - x', y - y') dx' dy'. \quad (25)$$

Сравнение (25) с (1) дает выражение аппаратной функции датчика Холла:

$$r(x, y) = \frac{v(y)S}{aneIK_H} j_{0x}(x, y). \quad (26)$$

Интегрируя (26) по всей поверхности датчика, и учитывая условие нормировки (2), получим:

$$K_H = \frac{1}{aneI} \int_{-b/2}^{b/2} v(y) \left[\int_{-a/2}^{a/2} j_{0x}(x, y) dx \right] dy. \quad (27)$$

Распределение x -компоненты плотности тока $j_0(x, y)$, которое входит в (26) и (27), для прямоугольного датчика Холла показано на рисунке 2, и может быть определено по распределению (14) потенциала $\varphi_0(x, y)$:

$$j_{0x}(x, y) = -\sigma \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \frac{I}{bd} + \frac{I}{\varepsilon d} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2\pi m \varepsilon / b)}{\pi m \text{ch}(\pi m a / b)} \text{ch} \frac{2\pi m x}{b} \cos \frac{2\pi m y}{b}. \quad (28)$$

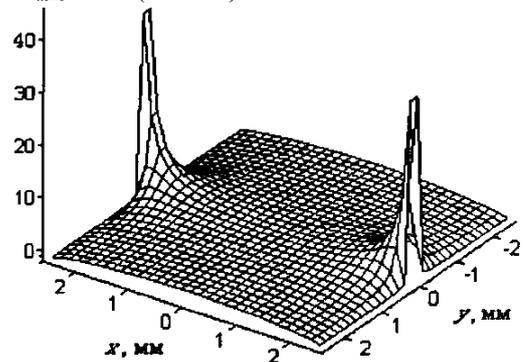


Рисунок 2 – Поверхность аппаратной функции датчика Холла

Для нахождения распределения плотности тока $j_E(x, y) = -\sigma \text{grad } \varphi_H$, предварительно определим распределение потенциала $\varphi_H(x, y)$, вызванное холловской разностью потенциалов u_H на потенциальных контактах датчика. Решение данной задачи, аналогично (14):

$$\varphi_H(x, y) = -\frac{u_H}{ad\sigma R} y - \frac{u_H}{\varepsilon d\sigma R} a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a)}{(\pi m)^2 \text{ch}(\pi m b / a)} \text{sh} \frac{2\pi m y}{a} \cos \frac{2\pi m x}{a},$$

где R – выходное сопротивление датчика.

Соответственно,

$$j_{E_y}(x, y) = -\sigma \frac{\partial \varphi_H}{\partial y} = \frac{u_H}{adR} + \frac{u_H}{\varepsilon dR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a)}{\pi m \text{ch}(\pi m b / a)} \text{ch} \frac{2\pi m y}{a} \cos \frac{2\pi m x}{a}. \quad (29)$$

С учетом формулы (19) получаем:

$$f(x) = \frac{\frac{b}{2a} + \frac{a}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a)}{(\pi m)^2} \frac{sh(\pi m b / a)}{ch(\pi m b / a)} sh \frac{\pi m b}{a} \cos \frac{2\pi m x}{a}}{\frac{b}{2a} + \frac{a}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a)}{(\pi m)^2} \frac{sh(\pi m b / a)}{ch(\pi m b / a)} sh \frac{\pi m b}{a}}. \quad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (23), определим выражение вспомогательной функции $v(y)$:

$$v(y) = \left[\frac{b}{2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a) sh(\pi m b / a)}{(\pi m)^2 ch(\pi m b / a)} \right] \times \\ \times \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\frac{1}{a} + \frac{2}{\varepsilon a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a) ch(2\pi m y / a)}{\pi m ch(\pi m b / a)} \cos \frac{2\pi m x}{a}}{\frac{b}{2} + \frac{a^2}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m \varepsilon / a) sh(\pi m b / a)}{(\pi m)^2 ch(\pi m b / a)} \cos \frac{2\pi m x}{a}} dx. \quad (31)$$

Интеграл (31) в общем случае находится численно, однако для частного случая ($a = b$) он значительно упрощается и дает $v(y) = 1$. Тогда из (26)–(29) следует:

$$K_H = \frac{1}{aneI} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\int_{-b/2}^{b/2} j_{0x}(x, y) dy \right] dx = \frac{1}{ned}, \\ r(x, y) = 1 + \frac{2a}{\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi m ch(\pi m)} \sin \frac{2\pi m \varepsilon}{a} ch \frac{2\pi m x}{a} \cos \frac{2\pi m y}{a}. \quad (32)$$

Приведем результаты математического моделирования аппаратной функции датчика Холла типа SS495A с кристаллом размерами 5×5 мм, толщиной 1 мм и шириной потенциальных и токовых контактов 1 мм. Для моделирования и расчета аппаратной функции, так же как и при моделировании распределения потенциалов использовались первые тридцать членов ряда, при этом расчет показал, что погрешность не превышает 0,1 %. Общее число расчетных точек сетки составляло 34×35 . На рисунке 2 приведена поверхность аппаратной функции, она имеет ярко выраженные экстремальные значения в месте расположения токовых контактов. Для идеального точечного датчика

соответствует единственный и узкий экстремум $r(x, y)$ в виде дельта-функции. Физически это возможно в случае, если линейные размеры одного из токовых контактов кратно превышают линейные размеры другого.

Литература

1. Куско А. Качество энергии в электрических сетях / А. Куско. М. Томпсон; пер. с англ. М.: Додэка-XXI, 2008. 336 с.
2. Курбацкий В.Г. Качество электроэнергии и электромагнитная совместимость в электрических сетях / В.Г. Курбацкий. Братск: БрГТУ, 1999. 220 с.
3. Управление качеством электроэнергии / И.И. Карташов [и др.] / под ред. Ю.В. Шарова. М.: Изд. дом МЭИ, 2006. 320 с.
4. Вильданов Р.Г. Оборудование для создания диспетчерско-технологического пункта управления городскими электрическими сетями в рамках SMART GRID / Р.Г. Вильданов, Е.И. Буланкин, А.М. Буляккулов, Р.Ф. Сайфутдинов // Мониторинг. Наука и технологии. 2017. № 1. С. 69–73.
5. Belitsyn I.V. Method of quality improving of electric energy by changing the topology of wires connection on overhead power transmission lines / I.V. Belitsyn S.O. Khomutov // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973–4562. Vol. 12. № 3. 2017. P. 376–381.
6. Белицын И.В. Определение параметров магнитного поля электроустановок на основе датчика Холла / И.В. Белицын, М.В. Колодченко, Э.В. Шибанов // Электроника в XXI веке: регион. молодежн. научн.-техн. конф.: Сб. матер. Брянск, 2012. С. 58–61.
7. Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: в 3 т.: учебник для вузов. Том 3. 4-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. СПб.: Питер, 2003. 364 с.