УДК 517.97

ПОДВИЖНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ТОЧЕЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.Т. Эрмекбаева

Исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечного подвижного источника. Построен алгоритм полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; нелинейное интегральное уравнение; принцип сжимающих отображений; оптимальный процесс.

SOLUTION OF THE NONLINEAR OPTIMIZATION TASK OF HEAT PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE MOVABLE CONTROL

A.T. Erkembaeva

It was investigated the problem of optimal control of heat processes, described by integro-differential equations when heat conduction occur under the movable point control. The algorithm of complete solution of nonlinear optimization problem was constructed.

Keywords: functional; optimal control; nonlinear integral equation; contraction mapping principle; optimal process.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Рассмотрим задачу минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$I\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u(t)\right],\quad x\in(0,1),\ 0<t\le T, \qquad (2)$$

$$v(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,1), \qquad (3)$$

$$v_x(t,0)=0,\quad v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\quad 0<t\le T, \qquad (4)$$

где $K(t,\tau)$ – заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \qquad (5)$$

т. е. $K(t,\tau)\in H(D)$; $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T); \qquad (6)$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1; λ – параметр; T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

2. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Здесь мы продолжаем исследования, начатые в статье [1]. Поэтому сохранены те же обозначения.

В [1] было установлено, что оптимальное управление определяется из соотношения

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}=\omega\left(t,x_0(t)\right). \tag{7}$$

Выписываем функцию $\omega\left(t,x_o(t)\right)$ ([1], формула (39))

$$\omega(t,x_0(t))=-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[-h_n+\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t)),$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right],\quad G_n(T,t,\lambda)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds.$$

Введем обозначение

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))h_n, \tag{8}$$

$$G[u(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(t))\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau \tag{9}$$

и $\omega(t,x_0(t))$ перепишем в виде

$$\omega(t,x_0(t))=2\left[h(t)-G\left(u(t)\right)\right]. \tag{10}$$

Лемма 1. Функция $h(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0,T)$, т. е. $h(t)\in H(0,T)$.

Доказательство. Учитывая представление (8), и используя неравенство Коши–Буняковского, для суммы имеем неравенство:

$$\int_0^T h^2(t)dt\le\int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)h_n\right)^2dt\le\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(T,t,\lambda)z_n^2(x_0)\sum_{n=1}^{\infty}h_ndt.$$

Далее на основе следующих вычислений

$$1)\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(T,t,\lambda)z_n^2(x_0)dt\le2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\\+\lambda\int_0^T Q_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\end{pmatrix}^2dt\le4\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-t)}dt+\\+\lambda^2\int_0^T\int_0^T Q_n^2(s,t,\lambda)ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-s)}dsdt\end{pmatrix}\le$$

$$\le4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2}\left[1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\le2\left[1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right);$$

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}h_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n-\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2s}ds\right]\right)^2\le3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2+2\psi_n^2\left[e^{-2\lambda_n^2T}+\lambda^2\int_0^T R_n^2(T,s,\lambda)ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2s}ds\right]\right)\le$$

$$\le3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2+2\psi_n^2\left[e^{-2\lambda_n^2T}+\lambda^2\frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\frac{1}{2\lambda_n^2}\right]\right)\le3\left\{\left\|\xi(x)\right\|_{H(0,1)}^2+2\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{2\lambda_1^2\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left\|\psi(x)\right\|_{H(0,1)}^2\right\},$$

имеем неравенство

$$\int_0^T h^2(t)dt \le 2\left[1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times 3\left\{\|\xi(x)\|^2_{H(0,1)}+2\left(1+\frac{\lambda^2 K_0}{2\lambda_1^2\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}\right\}<\infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. Оператор $G[u(t)]$ переводит пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\int_0^T G^2[u(t)]dt = \int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0(\tau))\int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0(\tau))f[\tau,u(\tau)]d\tau\right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(T,t,\lambda)z_n^2(x_0(\tau))\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \varepsilon_n^2(T,\tau,\lambda)z_n^2(x_0(\tau))d\tau\int_0^T f^2[\tau,u(\tau)]d\tau dt \le$$

$$\le\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^T \varepsilon_n^2(T,\tau,\lambda)z_n^2(x_0(\tau))d\tau \le 2\int_0^T\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_0^T R_n(\mathrm{t,s},\lambda)e^{-\lambda_n^2(\mathrm{s}-\tau)}ds\right)^2 d\tau \le 4\int_0^T\left(e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda^2\int_0^T R_n^2(\mathrm{t,s},\lambda)ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(\mathrm{s}-\tau)}ds\right)d\tau \le\\ \displaystyle\le 4\left(\frac{1}{2\lambda_n^2}+\lambda^2\frac{K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\frac{1}{2\lambda_n^2}\right)=\frac{2}{\lambda_n^2}\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\end{array}\right|\le$$

$$\le 2\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\times 2\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\|f[t,u(t)]\|^2_{H(0,T)}=$$

$$=\left(2\left(1+\frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right)^2\|f[t,u(t)]\|^2_{H(0,T)}<\infty,$$

которое получено непосредственным вычислением.

Лемма 3. Функция $\omega(t,x_0(t))$ является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций $H(0, T)$.

Доказательство. Утверждение леммы 3, в силу линейности пространства $H(0, T)$, следует из лемм 1, 2.

Равенство (7), с учетом (8)–(10), перепишем в виде

$$\beta\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]}+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\lambda)z_n(x_0)f[\tau,u(\tau)]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)z_n(x_0)h_n, \qquad (11)$$

которое является нелинейным интегральным уравнением. Это уравнение исследуем согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [2]. Положим:

$$\beta\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]}=q(t). \qquad (12)$$

Лемма 4. Пусть для функций $f(t,u(t))$ и $p(t,u(t))$ выполнено условие

$$\mu_0=\sup_{t\in(0,T)}\left(\frac{p_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right).$$

Тогда функция $q(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0, T)$, т. е. $q(t)\in H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T q^2(t)dt = \beta^2 \int_0^T \left(\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]} \right)^2 dt = \beta^2 \int_0^T \frac{1}{f_u^2[t,u(t)]} p_u^2[t,u(t)]p^2[t,u(t)]dt = \beta\mu_0^2 \int_0^T p^2[t,u[t]]dt <$$
$$< \beta\mu_0^2 \left\| p[t,u(t)] \right\|_{H(0,T)}^2 < \infty.$$

Равенство (12), в силу условия [1]

$$f_u[t,u(t)] \left(\frac{p[t,u(t)]p_u[t,u(t)]}{f_u[t,u(t)]} \right)_u > 0,$$

однозначно разрешается относительно $u(t)$ (см. теорему о неявно заданной функции [3]), т. е. существует функция φ, такая, что

$$u(t) = \varphi[t,q(t),\beta]. \tag{13}$$

Уравнение (11) с учетом (12), (13) перепишем в виде

$$q(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda) z_n(x_0(t)) \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\lambda) z_n(x_0(t)) f[\tau,\varphi(\tau,\mathrm{q}(\tau),\beta)]d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,t,\lambda) z_n(x_0(t)) h_n$$

или в операторной форме

$$q(t) = \overline{G}[q(t)] = h(t) - G_0[q(t)], \tag{14}$$

где

$$G_0[q] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(T,\tau,\lambda) z_n(x_0(t)) \int_0^T E_n(T,\tau,\lambda) f[\tau,\varphi(\tau,q(\tau),\beta)]d\tau.$$

Лемма 5. Оператор $G_0[q]$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя.

Доказательство. Утверждение леммы 5 следует из леммы 2.

Лемма 6. Пусть функции $f(t,u(t))$ и $\varphi(t,q(t),\beta)$ удовлетворяют условиям Липшица:

$$\left\| f[t,u(t)] - f[t,\bar{u}(t)] \right\|_{H(0,T)} \le f_0 \left\| u(t) - \bar{u}(t) \right\|_{H(0,T)}, \qquad f_0 > 0$$
$$\left\| \varphi[\tau,q(t),\beta] - \varphi[\tau,\bar{q}(t),\beta] \right\|_{H(0,T)} \le \varphi_0(\beta) \left\| [q(t) - \bar{q}(t)] \right\|_{H(0,T)}, \quad \varphi_0(\beta) > 0.$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

оператор $\overline{G}[q]$ является сжимающим.

Доказательство.

Поскольку

$$\left\| \overline{G}[q] - \overline{G}[\bar{q}] \right\|_{H(0,T)} = \left\| h - G_0[q] - h + G_0[\bar{q}] \right\|_{H(0,T)} = \left\| G_0[q] - G_0[\bar{q}] \right\|_{H(0,T)},$$

то утверждение леммы 6 следует из неравенства

$$\left\| G_0[q] - G_0[\bar{q}] \right\|_{H(0,T)} \le 2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda|\sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \left\| q(t) - \bar{q}(t) \right\|_{H(0,T)},$$

которое доказывается непосредственными вычислениями (см. доказательство леммы 2).

Теорема. При выполнении условий Лемм 4–6 операторное уравнение (14) имеет единственное решение в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций $H(0, T)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия лемм 4–6. Тогда оператор $\overline{G}[\cdot]$ переводит полное метрическое пространство $H(0, T)$ в себя, и является сжимающим. Поэтому оператор $\overline{G}[\cdot]$, согласно известной теореме [3] о принципе сжимающих отображений, имеет единственную неподвижную точку, которая является решением операторного уравнения (14).

Решение операторного уравнения (14) строится методом последовательных приближений по следующей схеме:

$$q_n(t) = \overline{G}\left[q_{n-1}(t)\right] = h(t) - \overline{G}_0\left[q_{n-1}(t)\right] \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

и точное решение определяется по формуле

$$q^0(t) = \lim_{n\to\infty} q_n(t).$$

Имеет место оценка

$$\left\|q^0(t) - q_n(t)\right\|_{H(0,T)} = \left\|\overline{G}\left[q^0(t)\right] - \overline{G}\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)} = \left\|h(t) - G_0\left[q^0(t)\right] - h(t) + G_0\left[q_n(t)\right]\right\| =$$

$$= \left\|G_0\left[q^0(t)\right] - G_0\left[q_n(t)\right]\right\|_{H(0,T)} \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G_0\left[q_0(t)\right] - q_0(t)\right\|_{H(0,T)}.$$

Эта оценка позволяет определить номер приближения, обеспечивающего заданную точность ε, т. е. номер приближения может быть определен из неравенства

$$\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G_0\left[q_0(t)\right] - q_0(t)\right\|_{H(0,T)} \le \varepsilon.$$

Подставляя найденное решение $q^0(t)$ в (13), находим оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, q^0(t), \beta\right],$$

которое является решением нелинейного интегрального уравнения (11).

3. Построение решения нелинейной задачи оптимизации. После определения оптимального управления, соответствующего оптимальному управлению $u^0(t)$, решение краевой задачи находим по формуле (см. [1]):

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds + a_n^0(t)\right)z_n(x),$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}z_n(x_0)f\left[\tau, u^0(\tau)\right]d\tau.$$

Это решение называется *оптимальным процессом*.

После определения оптимального управления и оптимального процесса, минимальное значение функционала (1) вычислим по формуле

$$I\left[u^0(t)\right] = \int_0^1\left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 + \beta\int_0^T p^2\left[t, u^0(t)\right]dt.$$

Найденная тройка $\left(u^0(t), v^0(t,x), I\left(u^0\right)\right)$ определяет полное решение задачи нелинейной оптимизации (1)–(6).

Литература

1. *Керимбеков А.* Условия оптимальности в задаче подвижного точечного управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. 2016. Т. 16. № 5.
2. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: автореф. дис.… д-ра физ.-мат. наук / А. Керимбеков. Бишкек, 2003. 21 с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.