УДК 539.3

УТОЧНЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ БИМОРФНОЙ ПЛАСТИНЫ

Д.А. Шляхин

Рассматривается нестационарная осесимметричная задача обратного пьезоэффекта для круглой жестко закрепленной биморфной пластины.

Ключевые слова: биморфная пластина; теория электроупругости; динамическая нагрузка; конечные интегральные преобразования.

REFINED SOLUTION TO A DYNAMIC PROBLEM ELECTROELASTICITY BIMORPH PLATE

D.A. Shlyakhin

The article considers the non-stationary axisymmetric problem of return piezoeffect to the circular plate rigidly fixed bimorph.

Keywords: bimorph plate; theory of electroelasticity; dynamic load; finite integral transforms.

Введение. В настоящее время в различных технических устройствах используются пьезокерамические преобразователи в виде тонких биморфных пластин [1]. В качестве расчетной модели, как правило, используется прикладная теория для тонких пластин, в которой кинематические гипотезы дополняются аналогичными допущениями о характере изменения электрического поля [2, 3].

Для учета особенностей изменения связанных физических полей в многослойных системах с разрезными электродами появляется необходимость проведения исследований в рамках теории электроупругости. Возникающие в этом случае значительные математические трудности позволили построить замкнутое решение в трехмерной постановке [4] при неполном удовлетворении краевых условий на цилиндрической поверхности жестко закрепленного элемента. Для решения данной проблемы в настоящей работе предложена новая модель динамического расчета биморфной пластины.

1. Постановка задачи. Пусть круглая жестко закрепленная пластина, занимающая в цилиндрической системе координат $\left(r_*,\theta,z_*\right)$ область Ω : $\left\{0\le r_*\le b,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le z_*\le h^*\right\}$, состоит из двух пьезокерамических элементов высотой h_1^* ($h^*=2h_1^*$), выполненных из материала гексагональной системы класса 6 mm. Изгибные осесимметричные колебания возбуждаются за счет подведения к лицевым электродам пьезопластин с противоположным направлением вектора аксиальной поляризации, электрического напряжения $V^*\left(r_*,t_*\right)$ и заземлением внутренних электродированных поверхностей (рисунок 1).

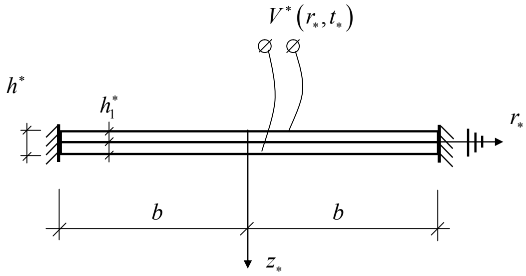

Рисунок 1 – Биморфная пластина

Дифференциальные уравнения движения и электростатики, а также краевые условия в цилиндрической системе координат и безразмерной форме имеют следующий вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\nabla U+\frac{C_{55}}{C_{11}}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\left(C_{13}+C_{55}\right)}{C_{11}}\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z}+\frac{\left(e_{31}+e_{15}\right)}{e_{33}}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0\,, \tag{1}$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}}\nabla\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{C_{33}}{C_{11}}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\left(C_{13}+C_{55}\right)}{C_{11}}\frac{\partial}{\partial z}\nabla U+\frac{e_{15}}{e_{33}}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\left(e_{31}+e_{15}\right)}{e_{33}}\frac{\partial}{\partial z}\nabla U+\frac{e_{15}}{e_{33}}\nabla\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-\frac{C_{11}\varepsilon_{11}}{e_{33}^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{C_{11}\varepsilon_{33}}{e_{33}^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0;$$

$$r=0{,}1\,,\ W\left(0,z,t\right)<\infty,\ U\left(0,z,t\right)<\infty,\ \phi\left(0,z,t\right)<\infty, \tag{2}$$

$$D_{r|r=1}=-\frac{C_{11}^{(1)}\varepsilon_{11}}{e_{33}^2}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{e_{15}}{e_{33}}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0,\ U\left(1,z,t\right)=0,\ W\left(1,z,t\right)=0;$$

$$z=0,h,\quad \sigma_{zz}=\frac{C_{13}}{C_{11}}\nabla U+\frac{C_{33}}{C_{11}}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial z}=0, \tag{3}$$

$$\sigma_{rz}=\frac{C_{55}}{C_{11}}\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)+\frac{e_{15}}{e_{33}}\frac{\partial\phi}{\partial r}=0,\quad \phi\left(r,z,t\right)=\pm V\left(r,t\right)/\,2;$$

$$z=h_1,\quad \left(\frac{C_{13}}{C_{11}}\nabla U+\frac{C_{33}}{C_{11}}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{|z+0}=\left(\frac{C_{13}}{C_{11}}\nabla U+\frac{C_{33}}{C_{11}}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z-0}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{|z+0}=\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{|z-0},\ U\left(z+0\right)=U\left(z-0\right),\ W\left(z+0\right)=W\left(z-0\right),\ \phi\left(z+0\right)=\phi\left(z-0\right)=0;$$

$$t=0,\quad U\left(r,z,0\right)=U_0\left(r,z\right),\quad W\left(r,z,0\right)=W_0\left(r,z\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial U\left(r,z,t\right)}{\partial t}_{|t=0}=\dot U_0\left(r,z\right),\ \ \frac{\partial W\left(r,z,t\right)}{\partial t}_{|t=0}=\dot W_0\left(r,z\right);$$

где $\left\{U,W,r,z,h,h_1\right\}=\left\{U^*,W^*,r_*,z_*,h^*,h_1^*\right\}/\,b$; $\left\{\phi,V\right\}=\left\{\phi^*,V^*\right\}\cdot e_{33}/\left(bC_{11}\right)$, $U^*\left(r_*,z_*,t_*\right)$, $W^*\left(r_*,z_*,t_*\right)-$ радиальная и аксиальная компоненты вектора перемещений; $\sigma_{zz}\left(r_*,z_*,t_*\right)$, $\sigma_{rz}\left(r_*,z_*,t_*\right)-$ нормальные и касательные механические напряжения; $D_r\left(r_*,z_*,t_*\right),\phi^*\left(r_*,z_*,t_*\right)-$ радиальная компонента вектора индукции и потенциал электрического поля; e_{mk}, $\varepsilon_{11},\varepsilon_{33}$ – пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости электроупругого материала $\left(m,k=\overline{1,5}\right)$; ρ,C_{mk} – объемная плотность и модули упругости пьезокерамического материала; $U_0,\dot U_0$, $W_0,\dot W_0-$известные в начальный момент времени перемещения и скорости перемещений; $t=t_*b^{-1}\sqrt{C_{11}/\rho}$, $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}$.

Соотношения (1)–(5) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения. Решение осуществляется методом интегральных преобразований, используя последовательно преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной *r* и обобщенное конечное преобразование (КИП) [6] по радиальной координате *z*. Первоначально соотношения (1)–(5) приводятся к стандартной форме, позволяющей провести данную процедуру разделения переменных. Для этого последнее равенство (2) заменяется условием наличия касательных напряжений $N_1\left(z,t\right)$ на цилиндрической поверхности пластины:

$$\sigma_{rz|r=1} = \frac{C_{55}}{C_{11}}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \frac{e_{15}}{e_{33}}\frac{\partial \phi}{\partial r} = N_1(z,t) \,. \tag{6}$$

В результате рассматривается новая задача электроупругости при действии на лицевых поверхностях биморфной пластины заданной электрической нагрузки $V(r,t)$ и приложенных на цилиндрической поверхности конструкции неизвестных касательных напряжений $N_1(z,t)$.

Для решения задачи (1)–(5), (6) вводятся новые функции $w(r,z,t)$, $\chi(r,z,t)$, связанные с $W(r,z,t)$, $\varphi(r,z,t)$ соотношениями:

$$W(r,z,t) = W_1(t) + R_0 C_{11}\varepsilon_{11} r N_1(z,t) + w(r,z,t), \tag{7}$$

$$\phi(r,z,t) = R_0 e_{33} e_{15} r N_1(z,t) + \chi(r,z,t),$$

где W_1, N_1 – неизвестные функции, определяемые в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений цилиндрической поверхности пластины (последнее краевое соотношение (2)); $R_0 = \left(C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2\right)^{-1}$.

В результате подстановки (7) в (1)–(5), (6) и учета особенностей изменения $\phi(r,z,t)$, получаем краевую задачу относительно функций U, w, χ. При этом дифференциальные уравнения (1) и первое краевое условие (3) становятся неоднородными с правыми частями $R_1 \div R_3$, B_1, а начальные условия (5) $W_0, \dot{W}_0$ следует заменить на $w_0, \dot{w}_0$ (промежуточные выкладки здесь и ниже не приводятся в связи с ограничением объема статьи).

Кроме того, условия (2), с учетом (6), (7), при $r = 1$, определяются равенствами:

$$U(1,z,t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}_{|r=1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r}_{|r=1} = 0. \tag{8}$$

К краевой задаче относительно U, w, χ применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r, используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n,z,t) = \int_0^1 U(r,z,t)\, r J_1(j_n r)\, dr, \tag{9}$$

$$\left\{w_H(j_n,z,t), \phi_H(j_n,z,t)\right\} = \int_0^1 \left\{w(r,z,t), \chi(r,z,t)\right\} r J_0(j_n r)\, dr,$$

и формулы обращения:

$$U(r,z,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(n,z,t)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \tag{10}$$

$$w(r,z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(n,z,t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \chi(r,z,t) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(n,z,t)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

где j_n – положительные нули функции $J_1(j_n)$, расположенные в порядке их возрастания $\left(n = \overline{0,\infty};\ j_0 = 0\right)$.

В пространстве изображений получаем новую краевую задачу относительно трансформант u_H, w_H, ϕ_H.

На втором этапе решения процедура стандартизации связана с приведением неоднородных граничных условий по координате z к однородным, при использовании следующих представлений:

$$u_H(n,z,t) = S_1(n,z,t) + U_H(n,z,t), \tag{11}$$

$$w_H(n,z,t) = S_2(n,z,t) + W_H(n,z,t), \quad \phi_H(n,z,t) = S_3(n,z,t) + \chi_H(n,z,t).$$

Здесь $S_1 = \frac{C_{11}e_{15}}{C_{55}e_{33}}\frac{j_n}{h_1^{\,2}}\left[\left(\left|z-h_1\right|\right)^3 - h_1\left(\left|z-h_1\right|\right)^2\right]V_H\left[1-2H\left(z-h_1\right)\right]$, $S_2 = \frac{C_{11}}{C_{33}}\left|1-\frac{z}{h_1}\right|\times\left(V_H + B_{1H|z=0}\right)$,

$S_3 = \left(1-\frac{z}{h_1}\right)V_H$, $H\left(...\right)-$ единичная функция Хэвисайда.

В результате подстановки (11) в краевую задачу относительно трансформант u_H, w_H, ϕ_H, получаем новую задачу для функций U_H, W_H, χ_H, которую решаем, используя структурный алгоритм обобщенного метода конечных интегральных преобразований (КИП) [6]. Для этого введем на сегменте $\left[0,h\right]$ КИП с неизвестными компонентами $K_1\left(\lambda_{in},z\right)$, $K_2\left(\lambda_{in},z\right)$, $K_3\left(\lambda_{in},z\right)$ вектор-функции ядра преобразования:

$$G\left(\lambda_{in},n,t\right) = \int_0^h \left(U_H K_{1in} + W_H K_{2in}\right)dz \,, \tag{12}$$

$$\left\{U_H, W_H, \chi_H\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} G_{in}\left\{K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}\right\}\left[\int_0^h \left(K_{1in}^2 + K_{2in}^2 + K_{3in}^2\right)dz\right]^{-2}, \tag{13}$$

где λ_{in} – положительные параметры, образующие счетное множество $\left(i=\overline{1,\infty}\right)$.

Подвергая соотношения для U_H, W_H, χ_H КИП [8], получаем однородную краевую задачу относительно компонент ядра преобразований $K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}$, а также счетное множество задач Коши для трансформанты G_{in}. Решение данных задач были получены автором в работе [7].

Подстановка $K_{1in}, K_{2in}, K_{3in}$ в граничные условия по переменной z формирует однородную систему уравнений относительно постоянных $D_{1in},...,D_{12in}$. Разыскивая ее нетривиальные решения, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_{in}, а также выражения постоянных интегрирования.

Окончательные выражения функций $U\left(r,z,t\right)$, $W\left(r,z,t\right)$, $\phi\left(r,z,t\right)$ получим, применяя последовательно формулы обращения (13), (10). Тогда, с учетом (7), (11), имеем:

$$U\left(r,z,t\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(j_n\right)^{-2}\left[S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in}K_{1in}\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]J_1\left(j_n r\right), \tag{14}$$

$$W\left(r,z,t\right) = W_1\left(t\right) + R_0 C_{11}\varepsilon_{11} r N_1\left(z,t\right) + 2\sum_{n=0}^{\infty} J_0\left(j_n\right)^{-2}\left[S_2 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in}K_{2in}\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right]J_0\left(j_n r\right),$$

$$\phi\left(r,z,t\right) = R_0 e_{33}e_{15} r N_1\left(z,t\right) + 2\sum_{n=0}^{\infty} J_0\left(j_n\right)^{-2}\left\{S_3 + \sum_{i=1}^{\infty} G_{in}K_{3in}\left[1-2H\left(z-h_1\right)\right]\left\|K_{in}\right\|^{-2}\right\}J_0\left(j_n r\right).$$

Функции $W_1\left(t\right)$, $N_1\left(z,t\right)$ определяются при удовлетворении последнего краевого условия (2):

$$W_1\left(t\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty} J_0\left(j_n\right)^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} G_{in}K_{2in|z=0}\left\|K_{in}\right\|^{-2}, \tag{15}$$

$$N_1\left(z,t\right) = W_1\left(t\right)\sum_{m=1}^{k} A_k\left|\left(z-h_1\right)^{k-m}\right|.$$

Здесь коэффициенты A_k определяются при удовлетворении условия $W\left(1,z,t\right)=0$. При этом краевое условие (2) удовлетворяется в $2k$–2 точках по высоте сечения биморфной пластины.

Полученные расчетные соотношения (14), (15) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1) и краевым условиям (2)–(5), т. е. представляют замкнутое решение рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

3. Численные результаты. Выводы. В качестве примера рассматривается биморфная пластина, имеющая следующие геометрические и физические характеристики аксиально поляризованных пьезокерамических пластин состава ЦТС–19:

$$b = 14\times10^{-3}\text{ м},\ \rho = 7730\text{ кг/м}^2,\ \{C_{11},C_{33},C_{12},C_{13},C_{55}\} = \{10.9,\ 9.1,\ 6.1,\ 5.4,\ 2.4\}\times10^{10}\text{ Н/м}^2,$$

$$\{e_{31},e_{33},e_{15}\} = \{-4.9,\ 14.9,\ 10.6\}\text{ Кл/м}^2,\ \{\varepsilon_{11},\varepsilon_{33}\} = \{7.73,\ 7.26\}\times10^{-9}\text{ Ф/м}.$$

Для анализа напряженно-деформированного состояния биморфной пластины рассматривается ее работа на первой резонансной частоте. В этом случае для наиболее эффективного преобразования внешнего электрического воздействия на лицевых поверхностях пьезокерамических пластин необходимо использовать два разрезных кольцевых электрода (количество и размеры электродов определяют нулевые значения функции $J_1(j_n)$) с радиусом их раздела $a = 8.8\times10^{-3}$ м ($r_1 = a/b = 0.628$). При этом электрический потенциал подводится к соседним электродам в противофазе.

Представляем электрическую нагрузку $V(r,t)$ в виде: $V(r,t) = V_0\left[H(r_1 - r) - H(r - r_1)\right]\sin\theta t$, где V_0,θ – амплитуда и частота внешнего воздействия в безразмерной форме.

На рисунках 2–4 представлены графики, характеризующие изменение по пространственным координатам и времени составляющих механических и электрических полей напряжений ($\theta = 0.8\lambda_{11}$).

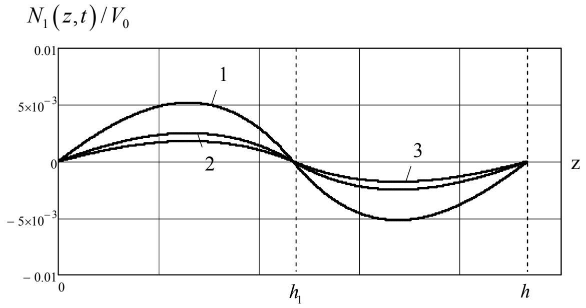

Рисунок 2 – Изменения амплитудных значений касательных напряжений $N_1(z,t)$ по высоте биморфной пластины: $1 - h_1^* = 10^{-3}$ м, $2 - h_1^* = 0.5\times10^{-3}$ м, $3 - h_1^* = 0.35\times10^{-3}$ м

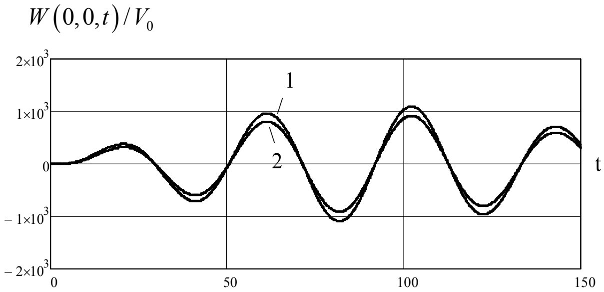

Рисунок 3 – График изменения вертикальной компоненты вектора перемещений $W(0,0,t)$ по времени ($h_1^* = 0.35\times10^{-3}$ м): 1,2 – с учетом и без учета действия касательных напряжений $N_1(z,t)$

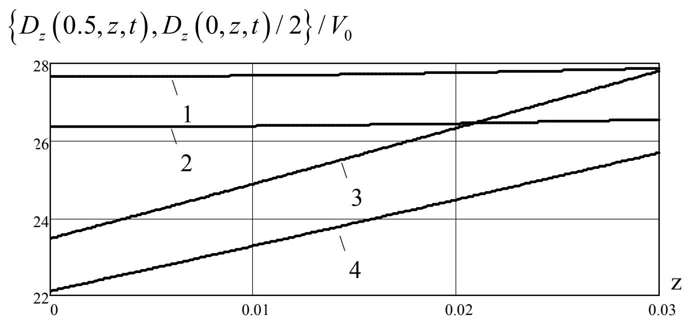

Рисунок 4 – Изменение амплитудных значений аксиальной компоненты вектора индукции электрического поля $D_z(r,z,t)$ по высоте пьезокерамической пластины ($0 \le z \le h_1^*$, $h_1^* = 0.5\times10^{-3}$ м): 1,2 – $r = 0.5$, 3,4 – $r = 0$; 1,3 – с учетом $N_1(z,t)$, 2,4 – без учета $N_1(z,t)$

На основании анализа результатов расчета можно сделать следующие выводы:

1. Антисимметричная форма касательных напряжений $N_1(z,t)$ (рисунок 2) относительно срединной поверхности практически не зависит от толщины пластин и частотных характеристик внешнего воздей-

ствия. Экстремальное значение $N_1(z,t)$ находится в переделах $(0.44 \div 0.46)$ h_1. Увеличение толщины пластины приводит к росту касательных напряжений в жесткой заделке.

2. Уточнение модели расчета, принятой в настоящей работе, приводит к увеличению вертикальной компоненты вектора перемещений. В частности, при вычислении $W(0,0,t)$ ($h_1^* = 0.35\times10^{-3}$ м) учет влияния $N_1(z,t)$, по сравнению с приближенным решением [4], приводит к росту перемещений на 17 % (рисунок 3, графики 1, 2). Данное соотношение примерно выполняется и при изменении толщины пластины.

3. Уточненная модель расчета не оказывает существенного влияния на изменение потенциала и напряженности электрического поля. Однако величина индукции электрического поля изменяется значительно. На рисунке 4 приведены графики изменения амплитудных значений аксиальной компоненты вектора индукции электрического поля $D_z(r,z,t)$ по высоте пьезокерамической пластины. Цифрами 1,3 обозначены результаты без учета, 2, 4 – с учетом касательных напряжений (1,2 – r = 0.5; 3,4 – r = 0). Разница составляет порядка 10 %. Причем при $r = 0.5$ величина D_z практически не меняется по переменной z (графики 1, 2), а в центре пластины $r = 0$ данные изменения существенны.

В заключение необходимо отметить, что данный подход также можно использовать при динамическом расчете тонких и толстых анизотропных упругих пластин.

Литература

1. Датчики / под ред. В.М. Шарапова. М.: Техносфера, 2012. 616 с.
2. *Adelman N.T.* Flexural-extensional behavior piezoelectric cilcular plates / N.T. Adelman, Y. Stavsky // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 67. № 3. P. 819–822.
3. *Ватульян А.О.* Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях / А.О. Ватульян, А.А. Рынкова // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 4. С. 114–122.
4. *Shlyakhin D.A*. Dynamical problem in the theory of electroelasticity for an asymmetric rigid bi-morph plate / D.A. Shlyakhin // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. P. 717–725. DOI information: 10.1016/j.proeng. 2015.07.137.
5. *Гринченко В.Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
6. *Сеницкий Ю.Э.* Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики / Ю.Э. Сеницкий // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
7. *Шляхин Д.А*. Вынужденные осесимметричные колебания толстой круглой жестко закрепленной пьезокерамической пластины / Д.А. Шляхин // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 90–100.