УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Уаисов, М.К. Дауылбаев

Рассматривается интегральная краевая задача для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных при условии, что корни “дополнительного характеристического уравнения” имеют противоположные знаки. Получены: аналитическая формула, асимптотические оценки решения и установлено асимптотическое поведение решения интегральной краевой задачи в точках начальных скачков. Построена измененная вырожденная краевая задача. Доказана сходимость решения сингулярновозмущенной интегральной краевой задачи к решению соответствующей измененной вырожденной краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярное возмущение; малый параметр; асимптотические оценки; начальный скачок.

СИНГУЛЯРДУУ КОЗГОЛГОН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ИНТЕГРАЛДЫК ЧЕКТИК МАСЕЛЕНИ ЧЫГАРУУНУН АСИМПТОТИКАЛЫК ӨЗГӨРҮШҮ

Бул макалада “кошумча мүнөздөгүч теңдеменин” тамырлары карама-каршы белгиде болгон учурда жогорку тартиптеги туундулары кичине параметрди кармаган үчүнчү тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме үчүн коюлган интегралдык чектик маселе каралган. Чыгарылыштын аналитикалык формуласы, аны асимптотикалык баалоо алынган жана баштапкы секирик чекиттериндеги интегралдык чектик маселени чыгаруунун асимптотикалык өзгөрүшү тастыкталган. Сингулярдуу козголгон интегралдык чектик маселенин чыгарылышы ошого ылайык өзгөрүлгөн начарлаган чектик маселенин чыгарылышына окшоштугу далилденген.

Түйүндүү сөздөр: сингулярдуу козголуу, кичине параметр, асимптотикалык баалоолор, баштапкы секирик.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE INTEGRAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.B. Uaisov, M.K. Dauylbayev

The paper considers an integral boundary value problem for a third-order linear differential equation with a small parameter for the two highest derivatives, when the roots of the “additional characteristic equation” have opposite signs. Analytic formula, asymptotic estimates of the solution are obtained and established an asymptotic behavior of the solution of the integral boundary value problem at the points of initial jumps. Modified degenerate boundary value problem is constructed. The convergence of the solution of a singularly perturbed integral boundary value problem to the solution of the corresponding modified degenerate boundary value problem is proved.

Keywords: singular perturbation; small parameter; asymptotic estimates; initial jump.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром при двух старших производных

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t) \tag{1}$$

с интегральными краевыми условиями

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,\ \ h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta\ ,\ \ h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) - \int_0^1 \sum_{i=0}^{1} a_i(x) y^{(i)}(x,\varepsilon) dx = \gamma\ , \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, а $\alpha, \beta, \gamma -$ известные постоянные.

Пусть выполнены условия:

I. Функции $A(t), B(t), C(t),\ F(t), a_i(x), i=0,1$ на отрезке [0,1] являются непрерывно дифференцируемыми.

II. Корни “дополнительного характеристического уравнения” $\mu^2 + A(t)\mu + B(t) = 0$ удовлетворяют условиям $\mu_1(t) \le -\gamma_1 < 0, \quad \mu_2(t) \ge \gamma_2 > 0$.

III. $a_1(1) \ne 0$.

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = 0 . \tag{3}$$

Фундаментальная система решений уравнения (3) имеет асимптотическое при $\varepsilon \to 0$ представление:

$$y_1^{(i)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^i} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx} (\mu_1{}^i(t) y_{10}(t) + O(\varepsilon)) ,\ i = \overline{0,2} ,$$

$$y_2^{(i)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^i} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx} (\mu_2{}^i(t) y_{20}(t) + O(\varepsilon)) ,\ i = \overline{0,2} , \tag{4}$$

$$y_{30}^{(i)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(i)}(t) + O(\varepsilon) ,\ i = \overline{0,2} .$$

Здесь $y_{30}(t)$ имеет вид $y_{30}(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{C(x)}{B(x)} dx \right)$, а функции $y_{i0}(t), i = 1,2$ являются решениями задачи

$$p_i(t) y_{i0}'(t) + q_i(t) y_{i0}(t) = 0,\ y_{i0}(0) = 1, \quad i = 1,2,$$

где $p_i(t) = (A(t) + 2\mu_i(t))\mu_i(t),\ \ q_i(t) = 3\mu_i(t)\mu_i'(t) + A(t)\mu_i'(t) + C(t)$.

Строим вспомогательные функции:

$$K_0(t,s,\varepsilon) = \frac{P_0(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)};\ \ K_1(t,s,\varepsilon) = \frac{P_1(t,s,\varepsilon)}{W(s,\varepsilon)} , \tag{5}$$

где $W(s,\varepsilon) -$ вронскиан, составленный из ФСР уравнения (3), а $P_0(t,s,\varepsilon),\ P_1(t,s,\varepsilon)$ – определители, получаемые из вронскиана $W(s,\varepsilon)$ заменой его третьей строки строками $y_1(t,\varepsilon), 0, y_3(t,\varepsilon)$ и $0, y_2(t,\varepsilon), 0$ соответственно. Функции $K_0(t,s,\varepsilon), K_1(t,s,\varepsilon)$ по переменной t удовлетворяют уравнению (3).

Для функции $K_0(t,s,\varepsilon), K_1(t,s,\varepsilon)$ из (5) получаем асимптотические формулы при $\varepsilon \to 0$:

$$K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)} - \frac{\mu_1^q(t) y_{10}(t)}{\varepsilon^q y_{10}(s)\mu_1(s)\left(\mu_2(s) - \mu_1(s)\right)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(x)dx} + O(\varepsilon) \right), \quad s \le t, \tag{6}$$

$$K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon^2 \left(\frac{\mu_2{}^q(t) y_{20}(t)}{\varepsilon^q y_{20}(s)\mu_2(s)\left(\mu_2(s) - \mu_1(s)\right)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^s \mu_2(x)dx} + O(\varepsilon) \right),\ t \le s,\ q = \overline{0,2}.$$

Из (6) для функции $K_0(t,s,\varepsilon), K_1(t,s,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ получаем асимптотические оценки:

$$\left| K_0^{(q)}(t,s,\varepsilon) \right| \le C\varepsilon^2 + \frac{C}{\varepsilon^{q-2}} e^{-\gamma_1 \frac{t-s}{\varepsilon}} ,\ \left| K_1^{(q)}(t,s,\varepsilon) \right| \le \frac{C}{\varepsilon^{q-2}} e^{\gamma_2 \frac{s-t}{\varepsilon}} ,\ \ q = 0,1,2, \tag{7}$$

где $C > 0, \gamma_i > 0, i = 1,2$ – постоянные, не зависящие от ε .

Пусть функции $\Phi_i(t,\varepsilon), i = 1,2,3$ являются решениями задачи:

$$L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon) = 0,\ h_k \Phi_i(t,\varepsilon) = \delta_{ki},\ i,k = 1,2,3 .$$

Эти функции назовем граничными функциями и они определяются формулой:

$$\Phi_i(t,\varepsilon) = \frac{I_i(t,\varepsilon)}{I(\varepsilon)},\ \ i = 1,2,3 , \tag{8}$$

где $I(\varepsilon) = \begin{vmatrix} h_1 y_1(t,\varepsilon) & h_1 y_2(t,\varepsilon) & h_1 y_3(t,\varepsilon) \\ h_2 y_1(t,\varepsilon) & h_2 y_2(t,\varepsilon) & h_2 y_3(t,\varepsilon) \\ h_3 y_1(t,\varepsilon) & h_3 y_2(t,\varepsilon) & h_3 y_3(t,\varepsilon) \end{vmatrix}$, а $I_i(t,\varepsilon)$ – определители, получаемые из $I(\varepsilon)$ заменой его i -ой строки строкой $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon)$.

Для граничных функций $\Phi_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ из (8) с учетом (4) получаем следующие асимптотические формулы при $\varepsilon \to 0$:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(q)}(t) - \frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)y'_{30}(0)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx} + \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{y}_{30}(1)}{\varepsilon^q(1-a_1(1))y_{20}(1)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx} +$$

$$+O\left(\varepsilon + \varepsilon^{2-q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx} + \varepsilon^{1-q} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx}\right), \tag{9}$$

$$\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon) = -\varepsilon\frac{y_{30}^{(q)}(t)}{\mu_1(0)} + \frac{\mu_1^q(t)y_{10}(t)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx} + \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)\overline{y}_{30}(1)}{\varepsilon^{q-1}\mu_1(0)(1-a_1(1))y_{20}(1)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx} +$$

$$+O\left(\varepsilon^2 + \varepsilon^{2-q} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_1(x)dx} + \varepsilon^{2-q} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx}\right),$$

$$\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\mu_2^q(t)y_{20}(t)}{\varepsilon^q(1-a_1(1))y_{20}(1)} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx} + O\left(\varepsilon^{1-q} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 \mu_2(x)dx}\right), q=0,1,2,$$

где $\overline{y}_{30}(1) \equiv y_{30}(1) - \int_0^1 \sum_{i=0}^1 a_i(x) y_{30}^{(i)}(x)dx.$

Для граничных функций $\Phi_i(t,\varepsilon), i=1,2,3$ из (9) справедливы следующие асимптотические оценки при $\varepsilon \to 0$:

$$\left|\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \leq C + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^q} e^{-\gamma_2\frac{t}{\varepsilon}}, q=0,1,2,$$

$$\left|\Phi_2^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \leq C\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}, q=0,1,2, \tag{10}$$

$$\left|\Phi_3^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^q} e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}, q=0,1,2,$$

где $C>0, \gamma_i>0,\ i=1,2$ – постоянные, не зависящие от ε .

Теорема 1. Если выполнены условия I–III, то решение интегральной краевой задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде:

$$y(t,\varepsilon) = C_1\Phi_1(t,\varepsilon) + C_2\Phi_2(t,\varepsilon) + C_3\Phi_3(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \mathrm{K}_0(t,s,\varepsilon)F(s)ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_1^t \mathrm{K}_1(t,s,\varepsilon)F(s)ds, \tag{11}$$

где $\Phi_i(t,\varepsilon), i=1,2,3-$ граничные функции, $K_0(t,s,\varepsilon),\ \ K_1(t,s,\varepsilon)-$ вспомогательные функции, выражаемые формулой (5), а $C_i,\ i=1,2,3$ имеют вид:

$$C_1 = \alpha + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \mathrm{K}_1(0,s,\varepsilon)F(s)ds,\ C_2 = \beta + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \mathrm{K}'_1(0,s,\varepsilon)F(s)ds,$$

$$C_3 = \gamma - \int_0^1 \sum_{i=0}^1 a_i(x)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x K_0^{(i)}(x,s,\varepsilon)F(s)ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_1^x K_1^{(i)}(x,s,\varepsilon)F(s)ds\right)dx - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 \mathrm{K}_0(1,s,\varepsilon)F(s)ds. \tag{12}$$

Справедливость формулы (11) проверяется непосредственно.

Теорема 2. Если выполнены условия I–III, то для решения интегральной краевой задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \to 0$ оценки:

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \leq !\ (|\alpha| + \varepsilon|\beta| + \max_{0\leq t\leq 1}|F(t)|) + \frac{C}{\varepsilon^{q-1}} e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}(|\alpha| + |\beta| + \max_{0\leq t\leq 1}|F(t)|) +$$

$$+\frac{C}{\varepsilon^{q}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}(|\alpha|+\varepsilon|\beta|+|\gamma|+\varepsilon\max_{0\le t\le 1}|F(t)|),\qquad q=\overline{0,2},\tag{13}$$

где $C>0,\gamma_i>0,i=1,2$ – постоянные, не зависящие от ε .

Доказательство теоремы следует из (11) с учетом (7), (10), (12). Из теоремы 2 следует:

$$y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),y'(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\varepsilon\to 0\,.$$

Это означает, что решение краевой задачи (1), (2) обладает явлениями начальных скачков первого порядка в точке $t=0$ и нулевого порядка в точке $t=1$.

Рассмотрим следующую вырожденную задачу:

$$B(t)\overline{y}^{\,'}+C(t)\overline{y}=F(t),\ \ \overline{y}(0)=\alpha\ ,\tag{14}$$

получаемую из (1) при нулевом значении малого параметра. Решение задачи (14) имеет вид

$$\overline{y}(t)=\alpha e^{-\int\limits_0^t\frac{C(x)}{B(x)}dx}+\int\limits_0^t\frac{F(s)}{B(S)}e^{-\int\limits_s^t\frac{C(x)}{B(x)}dx}ds\,.\tag{15}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. Если выполнены условия I–III, то для решения $y(t,\varepsilon)$ сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) справедливы следующие предельные при $\varepsilon\to 0$ равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=\overline{y}(t),0\le t<1,\ \ \lim_{\varepsilon\to 0}C(t,\varepsilon)=\overline{y}'(t),\ 0<t<1,\tag{16}$$

где $\overline{C}(t)$ является решением вырожденной задачи (14).

Для доказательства теоремы 3 введем функцию $y(t,\varepsilon)-\overline{y}(t)=u(t,\varepsilon)$ для которой с учетом (14) имеем краевую задачу

$$\begin{cases}L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2u'''+\varepsilon A(t)u''+B(t)u'+C(t)u=-\varepsilon^2\overline{y}'''-\varepsilon A(t)\overline{y}'',\\ \\ h_1u(t,\varepsilon)=0,h_2u(t,\varepsilon)=\beta-h_2\overline{y}(t),h_3u(t,\varepsilon)=\gamma-h_3\overline{y}(t)\end{cases}\tag{17}$$

Так как задача (17) такого же типа, что и задача (1), (2), то для ее решения применяем оценки (13). Тогда получаем:

$$\begin{aligned}\left|u^{(q)}(t,\varepsilon)\right|&\le C(\varepsilon|\beta-h_2\overline{y}(t)|+\varepsilon)+\frac{C}{\varepsilon^{q-1}}e^{-\gamma_1\frac{t}{\varepsilon}}(|\beta-h_2\overline{y}(t)|+\varepsilon)+\\&+\frac{C}{\varepsilon^{q}}e^{-\gamma_2\frac{1-t}{\varepsilon}}(\varepsilon|\beta-h_2\overline{y}(t)|+|\gamma-h_3\overline{y}(t)|+\varepsilon^2),\quad q=\overline{0,2}.\end{aligned}\tag{18}$$

Из (18) следуют предельные равенства (16).

В силу оценок (13) и предельных равенств (16) имеем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(0,\varepsilon)=\overline{y}(0),\quad \lim_{\varepsilon\to 0}y'(0,\varepsilon)=\overline{y}'(0)+\Delta_0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}y(1,\varepsilon)=\overline{y}(1)+\Delta_1,$$

$$y''(0,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),y'(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),y''(1,\varepsilon)=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\varepsilon\to 0\,,$$

где Δ_0 и Δ_1 − начальные скачки решения задачи (1), (2). Величины этих скачков определяются из (11), (12) и (15) с учетом (6), (9) в виде

$$\Delta_0=y'(0,\varepsilon)-\overline{y}'(0)=\frac{\alpha\ !\ (0)-F(0)}{B(0)}\ ,\ \Delta_1=y(1,\varepsilon)-\overline{y}(1)=\frac{1}{1-a_1(1)}\left[\alpha\left(y_{30}(1)-\int\limits_0^1\sum_{i=0}^{1}a_i(x)y_{30}^{(i)}(x)dx\right)+\gamma-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^1\frac{F(s)}{B(s)y_{30}(s)}\left(y_{30}(1)+a_1(s)y_{30}(s)+\int\limits_s^1\sum_{i=0}^{1}a_i(x)y_{30}^{(i)}(x)dx\right)ds\right].$$

Авторы были частично поддержаны грантом МОН РК № AP05132587 "*Краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с непрерывным и кусочно-постоянным аргументом*" *(2018–2020) Комитета по науке Министерства образования и науки Республики Казахстан.*

Список использованной литературы

1. *Kassymov K.A.* Asymptotic Estimates of Solution of a Singularly Perturbed Boundary Value Problem with an Initial Jump for Linear Differential Equations / K.A. Kassymov, D.N. Nurgabyl // Differential Equations. 2004. Vol. 40. No. 5. P. 641–651.
2. *Kassymov K.A.* Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives / K.A. Kassymov, D.N. Nurgabyl, A.B. Uaisov // Ukrainian Mathematical Journal. 2013. Vol. 65. No 5. P. 694–708.
3. *Касымов К.А.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений / К.А. Касымов, М.К. Дауылбаев // Дифференциальные уравнения. Москва–Минск, 1999. Т. 35. № 6. С. 822–830.
4. *Dauylbaev M.K.* The asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed nonlinear integro-differential equations / М.К. Дауылбаев // Siberian Mathematical Journal. 2000. Vol. 41. № 1. P. 49–60.
5. *Dauylbaev M.K.* Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations / M.K. Dauylbaev, A.E. Mirzakulova // Journal of Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. USA. 2016. Vol. 5. № 2. P. 147–154.
6. *Dauylbaev M.K.* Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integrodifferential equations / M.K. Dauylbaev, A.E. Mirzakulova // Journal of Mathematical Sciences. USA. 2017. Vol. 222. № 3. P. 214–225.