УДК 517.97

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ, ОПИСЫВАЕМЫМ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А.К. Кадиримбетова

Исследованы вопросы однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения оптимального управления, которое может иметь решение лишь определенного знака. Найдены достаточные условия существования решения определенного знака оптимального управления в виде системы неравенств.

Ключевые слова: оптимальное управление; кусочно-линейный функционал; нелинейное интегральное уравнение; достаточное условие.

CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF INTEGRAL EQUATIONS IN CONTROL PROBLEM OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.K. Kadirimbetova

It was investigated the problems of the unique solvability of a nonlinear integral equation of optimal control, which can have a solution only a definite sign. It was found sufficient conditions for the existence of solutions a definite sign of optimal control as a system of inequalities.

Key words: The control; piecewise linear functional; nonlinear integral equation; the sufficient condition.

В работе [1] была рассмотрена задача оптимизации, где требуется минимизировать кусочно-линейный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T |u(t)|\,dt, \beta > 0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau + g(t,x),$$

$$0 < x < 1, \ \ 0 < t \le T, \quad (2)$$

$$v(0,x) = \psi(x), \ \ 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$v_x(t,0) = 0, \ \ v_x(t,1) + \alpha v(t,1) = f[t,u(t)],$$

$$0 < t \le T, \quad (4)$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция, $v(t,x)$, $(t,x) \in Q = \{0 < x < 1, \ 0 < t \le T\}$ – описывает состояния управляемого процесса, ядро $K(t,\tau)$ – известная функция, определенная в квадрате $A = \{0 < t < T$, $0 < \tau < T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau d\tau = K_0 < \infty;$$

$g(t,x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0,1)$, $f[t,u(t)] \in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т. е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u} \ne 0, \forall t \in [0,T]; \quad (5)$$

λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Как было показано в [1], оптимальное управление следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t,u(t)]\,sign\,u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda) f[s,u(s)]\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t,\lambda)h_n, \quad (6)$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right) -$$

$$-\int_0^T g_n(\tau)\left(e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)d\tau,$$

$$G_n(t,\lambda)=z_n(1)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right],$$

$$G_n(t,\lambda)=\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T R_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right)z_n(1),$$

а $R_n(T,\tau,\lambda)$ и $R_n(s,t,\lambda)$ – известные функции (см. [1]).

Уравнение (6) – интегральное уравнение типа Фредгольма, которое не обладает свойством продолжаемости решения на отрезке $[0,T]$. С учетом этого обстоятельства при исследовании однозначной разрешимости уравнения (6) имеем следующие задачи:

Задача 1. Если $u(t)>0,\ \ t\in[0,T]$, то "оптимальное" управление определяется как решение положительного знака интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t,u(t)]+ +\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f[s,u(s)]ds= =\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n, \tag{7}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)]\left(\frac{1}{f_u[t,u(t)]}\right)_u>0,\ \ t\in[0,T]. \tag{8}$$

Задача 2. Если $u(t)<0,\ \ t\in[0,T]$, то "оптимальное" управление определяется как решение отрицательного знака интегрального уравнения

$$-\beta f_u^{-1}[t,u(t)]+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f[s,u(s)]ds= =\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)h_n, \tag{9}$$

удовлетворяющее дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)]\left(\frac{1}{f_u[t,u(t)]}\right)_u<0,\ \ t\in[0,T]. \tag{10}$$

Заметим, что условия (8) и (10) не могут быть выполнены одновременно. Поэтому оптимальное управление $u^0(t)$ определяется как решение либо задачи 1, либо задачи 2. Обозначим через $u^+(t)$ решение задачи 1, а через $u^-(t)$ – решение задачи 2. Оптимальность управлений $u^+(t)$ и $u^-(t)$ определяется из условий: $J[u^+(t)]$ и $J[u^-(t)]$:

$$u^0(t)=\begin{cases}u^+(t), & u(t)>0,\ \ J[u^+(t)]<J[u^-(t)];\\ u^-(t), & u(t)<0,\ \ J[u^-(t)]<J[u^+(t)].\end{cases}$$

Теперь исследуем вопросы разрешимости задачи 1. Рассмотрим интегральное уравнение (7) с дополнительным условием (8). Относительно дополнительного условия (8) будем предполагать, что функция $f[t,u(t)]$ принадлежит классу функций, удовлетворяющих условию (8). Тогда решением задачи 1 может быть любая функция положительного знака на отрезке $[0,T]$, удовлетворяющая интегральному уравнению (7).

Сначала исследуем вопросы существования единственного решения уравнения (7). С этой целью, согласно методике работы [2], положим

$$\beta f_u^{-1}[t,u(t)]=p(t). \tag{11}$$

Согласно условию (8), из (11) функция $u(t)$ определяется однозначно, т. е. существует функция $\varphi(\cdot)$, такая что

$$u(t)=\varphi[t,p(t),\beta]. \tag{12}$$

В силу (11) и (12) уравнение (7) перепишем в виде операторного уравнения

$$p(t)=G[p(t)], \tag{13}$$

где

$$G[p(t)]= =\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t,\lambda)\left[h_n-\int_0^T G_n(s,\lambda)f[s,\varphi(s,p(s),\beta)]ds\right]. \tag{14}$$

Далее, непосредственными вычислениями докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если для любого $u(t)\in H(0,T)$ функция $f[t,u(t)]$ является элементом пространства $H(0,T)$, то $p(t)$, определяемая формулой (11), является элементом пространства функций, суммируемых в степени σ, т. е. $L_\sigma(0,T),\ \ 1\le\sigma<\infty$.

Отметим, что мы будем пользоваться значением $\sigma=2$, т. е. $L_2(0,T)=H(0,T)$.

Лемма 2. Оператор $G[p(t)]$ переводит пространство $H(0,T)$ в себя.

Лемма 3. Пусть функции $f[t,u(t)]$ и $\varphi[t,p(t),\beta]$ удовлетворяют следующим условиям Липщица:

$$\left\|f[t,u(t)]-f[t,\bar u(t)]\right\|_H\le f_0\left\|u(t)-\bar u(t)\right\|_H,\ \ f_0>0; \tag{15}$$

$$\left\|\varphi[t,p(t),\beta]-\varphi[t,\bar p(t),\beta]\right\|_H\le \le\varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar p(t)\right\|_H,\ \ \varphi_0(\beta)>0. \tag{16}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2\left[1+\frac{2\lambda_1^2}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right]\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1 \quad (17)$$

оператор $G[p]$ является сжимающим.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5), (8), (15)–(17). Тогда операторное уравнение (13) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Гильбертово пространство $H(0,T)$ является полным метрическим пространством. Оператор $G[p]$ переводит пространство $H(0,T)$ в себя и является сжимающим. Поэтому, согласно принципу сжимающих отображений [3], операторное уравнение (13) в пространстве $H(0,T)$ имеет единственное решение.

Это решение находится методом последовательных приближений, т. е. k-е приближение решения определяется из условия

$$p_k(t) = G\left[p_{k-1}(t)\right], \quad k = 1,2,3,\dots,$$

где $< p_0(t)$ – произвольный элемент пространства $H(0,T)$.

Точное решение $\tilde{p}(t)$ операторного уравнения (13) находится по формуле

$$\tilde{p}(t) = \lim_{k\to\infty} p_k(t),$$

и имеет место оценка

$$\left\|\tilde{p}(t)-p_k(t)\right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H. \quad (18)$$

Далее найденное $\tilde{p}(t)$ подставляем в (12), и получим функцию

$$u^+(t) = \varphi\left[t, \tilde{p}(t), \beta\right],$$

которая при выполнении условия $u(t) > 0, \; t \in [0,T]$, является решением задачи. Отметим, что выполнение этого условия может быть достигнуто, если на параметры задачи будут наложены дополнительные требования. Аналогично решается задача 2.

Литература

1. *Керимбеков А.К.* Интегральное уравнение оптимального управления в задаче тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением / А.К. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Матер. межд. научн.-практич. конф. “Информационные технологии: инновации в науке и образовании”. Бишкек, 2015. С. 178–182.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т матем. НАН КР. Бишкек, 2003. 224с.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.