УДК 517.977.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ФРЕДГОЛЬМА

А.К. Керимбеков, Р.Ж. Наметкулова

Исследована задача нелинейного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми интегро-дифференциальным уравнением Фредгольма. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

SOLUTION OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF THE THERMAL PROCESSES, DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.K. Kerimbekov, R.Zh. Nametkulova

The article dedicated to the study of the nonlinear optimal heating control, described by Fredholm integro-differential equations. The sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem have been established.

Key words: boundary value problem; the generalized solution; the functional; the optimal control; nonlinear integral-differential equation.

I. Краевая задача управляемого процесса. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый краевой задачей [1–3]:

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau + g(t,x)\,f[t,u(t)],\ 0<x<1,\ 0<t\le T, \tag{1}$$

$$v(0,x) = \psi(x),\ 0<x<1, \tag{2}$$

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0,\ 0<t\le T, \tag{3}$$

где функция $v(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ 0<t\le T\}$ описывает состояния управляемого процесса, ядро $K(t,\tau)$ – известная функция, определенная в квадрате $A=\{0<t<T,\ 0<\tau<T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt = K_0 < \infty; \tag{4}$$

$g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f[t,u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т. е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u} \ne 0, \forall t\in[0,T]; \tag{5}$$

λ – параметр, постоянная $\alpha>0$, T – фиксированный момент времени, $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)z_n(x). \tag{6}$$

Здесь функции [4]

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\alpha^2)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,$$

при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3,...$, является решением краевой задачи

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, z'(0) = 0, z'(1) + \alpha z(1) = 0 \qquad (7)$$

и образует полную ортонормированную систему собственных функций в пространстве H (0, 1), а соответствующие собственные значения λ_n краевой задачи (7) определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$ и удовлетворяет условиям

$$\lambda_n < \lambda_{n+1}, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad (n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1); \qquad (8)$$

коэффициенты Фурье $v_n(t)$, согласно методике работы [5], как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма 2-рода вида

$$v_n(t) = \lambda\int_0^T K_n(t,s)\, v_n(s)ds + a_n(t) \qquad (9)$$

с ядром

$$K_n(t,s) = \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau,s)d\tau \qquad (10)$$

и свободным членом

$$a_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)]d\tau, \qquad (11)$$

определяется по формуле [6]

$$v_n(t) = \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds + a_n(t), \qquad (12)$$

где резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ ядра $K_n(t,s)$ определяется с помощью повторных ядер $K_{n,i}(t,s)$ в виде следующего ряда Неймана [6]:

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n\,i}(t,s) \qquad (13)$$

и при выполнении условия

$$|\lambda|\sqrt{K_0 T} < \sqrt{2}\lambda_1, \qquad (14)$$

является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$| R_n(t,s,\lambda) | \le \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}} \left(\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta \right)^{1/2}. \qquad (15)$$

Отметим, что в силу условий (6) и (14) каждое управление $u(t) \in H(0,T)$ определяет единственное слабо обобщенное решение $v(t,x) \in H(Q)$ краевой задачи (1)–(3).

II. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности. Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 [v(T,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta\int_0^T u^2(t)dt, \beta > 0, \qquad (16)$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция, на множестве решений краевой задачи (1)–(3), т. е. нужно найти такое управление $u^0(t) \in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $v^0(t,x)$ краевой задачи (1)–(3) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (16). При этом $u^0(t)$ называется оптимальным управлением, а $v^0(t,x)$ о – оптимальным процессом.

Поскольку каждое управление $u(t)$ единственным образом определяет управляемый процесс $v(t, x)$, то в силу условия (5) управлению $u(t) + \Delta u(t)$, соответствует решение краевой задачи (1)–(3) вида $v(t, x) + \Delta v(t, x)$, где $\Delta v(t, x)$ приращение соответствующее приращению $\Delta u(t)$. Согласно методике вывода принципа максимума [4, с. 743–755] приращение функционала (16) можно представить в виде

$$\Delta J[u] = J[u + \Delta u] - J[u] = -\int_0^T \Delta\Pi[t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)]dt + \int_0^1 \Delta v^2(T,x)dx, \qquad (17)$$

где

$$\Delta\Pi(t,v,\omega,u) = \Pi(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t) + \Delta u(t)) - \Pi(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)),$$

$$\Pi(t, v(t,x), \omega(t,x), u(t)) = \int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx f[t,u(t)] - \beta u^2(t), \qquad (18)$$

а функция $\omega(t, x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_t + \omega_{xx} + \lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau = 0, \; 0 < x < 1, \; 0 \le t < T,$$

$$\omega(T,x)+2\left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]=0,\ 0<x<1,$$
$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0,\ 0\le t<T. \quad (19)$$

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4], как следствие (17), оптимальное управление определяется из соотношений

$$2\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx, \quad (20)$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{u(t)}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u>0, \quad (21)$$

которые называются условиями оптимальности.

III. Решение сопряженной краевой задачи. Решение сопряженной краевой задачи (19) ищем в виде ряда

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)\,. \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$, при каждом фиксированном n = 1, 2, 3, ..., удовлетворяют соотношениям

$$\omega_n'(t)-\lambda_n^2\omega_n(t)=-\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega_n(\tau)d\tau,$$

$$\omega_n(\tau)+2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]=0,$$

которые можно преобразовать к линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds-2e^{-\lambda_n^2(T-t)}[\nu_n(T)-\xi_n], \quad (23)$$

где ядро

$$B_n(s,t)=\int_t^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}K(s,\tau)d\tau \text{ и } B_n(s,T)=0. \quad (24)$$

Решение уравнение (23) находим по формуле [6]

$$\omega_n(t)=-2\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\lambda\int_0^T\widetilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right), \quad (25)$$

где резольвента $R_n(s,t,\mu)$ ядра $B_n(s,t)$ имеет вид

$$\widetilde{R}_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t),\ B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta,\ i=1,2,3,...,$$

и при выполнении условия (14) является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$|\widetilde{R}_n(s,t,\lambda)|\le\frac{1}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}}\left(\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta\right)^{1/2}. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что $\omega(t,x)$ является элементом пространства $H(Q)$. Это следует из неравенства

$$\int_0^T\int_0^1\omega^2(t,x)dxdt=\int_0^T\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x)\right)^2dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2(t)dt\le 8\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]^2\left(e^{-2\lambda_n^2(T-t)}+\right.$$

$$\left.+\lambda^2\int_0^T R_n^2(s,t,\lambda)ds\cdot\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-s)}ds\right)_{dt}\le 8\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[\nu_n(T)-\xi_n\right]^2\left(1+\lambda^2\frac{1}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^T\int_0^T K^2(s,\eta)d\eta ds\cdot\frac{1}{2\lambda_n^2}\right)dt\le 16T\left(1+\frac{\lambda^2K_0}{\left(2\lambda_1^2\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_n^2(T)-\xi_n^2)<\infty,$$

которое имеет место в силу следующих соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n^2(T)<\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2=\|\xi(x)\|_H^2\,.$$

IV. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (20) и (21). Решение сопряженной краевой задачи (19), определяемое равенствами (22) и (25), подставим в (20). Сначала вычислим интеграл

$$\int_0^1 g(t,x)\omega(t,x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)z_n(x)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(t)z_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\omega_n(t)$$

и равенство (20) перепишем в виде

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\left[\nu_n(T)-\xi_n\right](e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T \widetilde{R}_n(s,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds).$$

Согласно (12), с учетом (11), это равенство приводим к виду

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,u(s)\right]ds = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t)h_n, \tag{27}$$

где

$$\widetilde{G}_n(t,\lambda) = g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_0^T \widetilde{R}_n(\tau,t,\lambda)e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}d\tau\right], \tag{28}$$

$$G_n(t,\lambda) = g_n(t)\left[e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2(\tau-t)}d\tau\right], \tag{29}$$

$$h_n = \xi_n - \psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda\int_0^T R_n(T,\tau,\lambda)e^{-\lambda_n^2\tau}d\tau\right]. \tag{30}$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения (27) и при этом должно выполняться условие (21). Условие (21) ограничивает класс функций внешних воздействий $f\,[t,\, u\,(t)]$. Поэтому будем считать, что функция $f\,[t,\, u\,(t)]$ удовлетворяет условию (21) для любого управления $u(t)\in H(0,T)$.

Нелинейное интегральное уравнение (27) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [7]. Положим

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right] = p(t). \tag{31}$$

Лемма 1. Функция $p\,(t)$ является элементом пространства $H\,(0,\, t)$.

Доказательство. В силу условия (5) имеет место оценка

$$\left|f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]\right| \le M,\quad \forall t\in[0,T].$$

Так как $u(t)\in H(0,T)$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T p^2(t)dt \le \beta^2\int_0^T\left|f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]\right|^2\left|u(t)\right|^2 dt \le \beta^2 M^2\int_0^T u^2(t)dt < \infty.$$

Согласно условию (21), из равенства (31) управление $u\,(t)$ определяется однозначно, т. е. существует функция φ такая, что

$$u\,(t) = \varphi\,(t,\, p\,(t),\, \beta). \tag{32}$$

В силу *(31)* и *(32)* уравнение *(27)* перепишем в виде

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t,\lambda)\int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t)h_n \tag{33}$$

или в операторной форме

$$p\,(t) = G\,[p\,(t)], \tag{34}$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{G}_n(t,\lambda)\left[h_n - \int_0^T G_n(s,\lambda)f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right]ds\right]. \tag{35}$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (34).

Лемма 2. Оператор $G\,[p\,(t)]$ отображает пространство $H\,(0,\, T)$ в себя, т е. является элементом пространства $H\,(0,\, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T G^2[p(t)]dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n(t,\lambda) \left[h_n - \int_0^T G_n(s,\lambda) f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right] ds \right] \right)^2 dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \left[h_n^2 + \int_0^T G_n^2(s,\lambda)ds \int_0^T f^2\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right] ds \right] dt \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n^2(t) \left[e^{-2\lambda_n^2(T-t)} + \lambda \int_0^T \widetilde{R}_n^{-2}(\tau,t,\lambda)d\tau \cdot \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)} d\tau \right] \times$$

$$\times \left\{ 2\left[\| (x) \|_H^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\lambda_1^2} \right) \| \psi(x) \|_H^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} 2g_n^2(t) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) \| f\left[s,\varphi(s,p(s),\beta)\right] \|_H^2 \right\} dt \le$$

$$\le 2\| g(t,x) \|_H^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \times \{ 2\| \xi(x) \|_H^2 +$$

$$+2\left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) \| \psi(x) \|_H^2 + \| g(x) \|_H^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) \cdot \| f[t,\varphi(t,p(t),\beta)] \|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) < \infty$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть выполнены условия:

$$\| f[t,u(t)] - f[t,\overline{u}(t)] \|_H \le f_0 \| u(t) - \overline{u}(t) \|_H, \tag{36}$$

$$\| \varphi[t,p(t),\beta] - \varphi[t,\overline{p}(t),\beta] \|_H \le \varphi_0(\beta) \| p(t) - \overline{p}(t) \|_H . \tag{37}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = \| g(t,x) \|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{a_0^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - a_0 \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \tag{38}$$

где a_0 – некоторое положительное постоянное, удовлетворяющее неравенству

$$|\lambda| < a_0 < \frac{\sqrt{2}\lambda_1}{\sqrt{K_0 T}}, \tag{39}$$

оператор $G[p]$ является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T \left| [G[p] - G[\overline{p}] \right|^2 dt = \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n(t,\lambda) \int_0^T G_n(s,\lambda) \Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\overline{p}(s),\beta)] \Big) ds \right)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{G}_n^2(t,\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(t,\lambda)ds \int_0^T \Big(f[s,\varphi(s,p(s),\beta)] - f[s,\varphi(s,\overline{p}(s),\beta)] \Big)^2 dsdt \le$$

$$\le \left[\| g(t,x) \|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T}\right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \| p(s) - \overline{p}(s) \|_H \right]^2,$$

откуда находим, что

$$\| G(p)-G(\overline{p}) \|_H \le \| g(t,x) \|_H^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6} \right) \left(1+\frac{\lambda^2 K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) \| p(t)-\overline{p}(t) \|_H .$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(5), (14)–(15), (21), (26), (36)–(39). Тогда операторное уравнение (34) в пространстве *H* (0, *T*) имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Лемм 1 и 2, операторное уравнение (34) можно рассматривать в пространстве *H* (0, *T*). Согласно Лемме 3, оператор *G* [*p*] является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство *H* (0, *T*) является полным метрическим пространством, то согласно теореме [8] о принципе сжимающих отображений, оператор *G* [*p*] имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (34) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (34) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. *n*-е приближение решения находится по формуле

$$p_n(t) = G\,[p_{n-1}(t)],\ \ n = 1, 2, 3, ...,$$

где $p_0(t)$ произвольный элемент пространства *H* (0, *T*), причем имеет место оценка

$$\| \overline{p}(t)-p_n(t) \|_H \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \| G[p_0(t)]-p_0(t) \|_H . \tag{40}$$

Точное решение $\overline{p}(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\overline{p}(t) = \lim_{n\to\infty} p_n(t).$$

Это решение подставляя в (32) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi\left[t, \overline{p}(t), \beta \right]. \tag{41}$$

Оптимальный процесс $v^0(t, x)$, т. е. решение краевой задачи (1)–(5), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, согласно (6), (11)–(12) находим по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) a_n(s) ds - a_n(t) \right) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 t} + \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) e^{-\lambda_n^2 t} ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^T e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n(\tau) f\left[\tau, u^0(\tau) \right] d\tau + \lambda \int_0^T R_n(t,s,\lambda) \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\eta)} g_n(\eta) f\left[\eta, u^0(\eta) \right] d\eta ds \right) \Bigg] z_n(x). \tag{42}$$

Минимальное значение функционала (17) вычислим по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left[v^0(T,x) - \xi(x) \right]^2 dx + \beta \int_0^T \left[u^0(t) \right]^2 dt. \tag{43}$$

Найденная тройка $\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)] \right)$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Верлань А.Ф.* Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. Киев: Наукова думка, 1988. 288 с.
2. *Тихонов А.Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, Б.В. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 264 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1968. Т. 32. № 4.
6. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
7. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Институт математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
8. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.